MVA101 - Analyse et Calcul matriciel

Valeurs propres - Vecteurs propres

3 février 2009

Exemple 1

On pose : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Quelles sont les valeurs propres de M ? Diagonaliser M.
2. A quoi est égale M^n ?
3. Quelle est la matrice e^{Mt} ?
4. Trouver les solutions du système différentiel :

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) \quad (1) \\ x_2'(t) &= 8x_1(t) + x_2(t) \quad (2) \end{aligned}$$

dans lequel x_1 et x_2 désignent deux fonctions de la variable t telles que $x_1(0) = 1$ et $x_2(0) = -1$.

Polynôme caractéristique

$$P(x) = det(M - xI_3) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 8 & 1-x \end{vmatrix}$$

Polynôme caractéristique

$$P(x) = det(M - xI_3) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 8 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$P(x) = (1-x)^2 - 16 = (1-x-4)(1-x+4) = (x+3)(x-5)$$

Polynôme caractéristique

$$P(x) = det(M - xI_3) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 8 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$P(x) = (1-x)^2 - 16 = (1-x-4)(1-x+4) = (x+3)(x-5)$$

Deux valeurs propres simples

$$\lambda_1 = -3 \text{ et } \lambda_2 = 5$$

Polynôme caractéristique

$$P(x) = det(M - xI_3) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 8 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$P(x) = (1-x)^2 - 16 = (1-x-4)(1-x+4) = (x+3)(x-5)$$

Deux valeurs propres simples

$$\lambda_1 = -3 \text{ et } \lambda_2 = 5$$

On peut vérifier :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 = 1 + 1 = trace(M)$$

et

$$\lambda_1.\lambda_2 = -15 = 1.1 - 16 = det(M)$$

La forme diagonale est donc

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La forme diagonale est donc

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Il faut trouver P telle que $MD = PD$, c'est-à-dire trouver une matrice formée de vecteurs propres.

Pour $\lambda_1 = -3$, si $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ est la solution recherchée, on doit résoudre

$$(M + 3I_3)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} v = 0$$

La forme diagonale est donc

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Il faut trouver P telle que $MD = PD$, c'est-à-dire trouver une matrice formée de vecteurs propres.

Pour $\lambda_1 = -3$, si $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ est la solution recherchée, on doit résoudre

$$(M + 3I_3)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} v = 0$$

On a immédiatement

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ -2v_1 \end{pmatrix}$$

La forme diagonale est donc

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Il faut trouver P telle que $MD = PD$, c'est-à-dire trouver une matrice formée de vecteurs propres.

Pour $\lambda_1 = -3$, si $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ est la solution recherchée, on doit résoudre

$$(M + 3I_3)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} v = 0$$

On a immédiatement

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ -2v_1 \end{pmatrix}$$

on peut donc prendre pour première colonne de P :

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = 5$, si $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ est la solution recherchée, on doit résoudre

$$(M - 5I_3)w = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} w = 0$$

Pour $\lambda_2 = 5$, si $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ est la solution recherchée, on doit résoudre

$$(M - 5I_3)w = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} w = 0$$

On a immédiatement

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ 2w_1 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = 5$, si $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ est la solution recherchée, on doit résoudre

$$(M - 5I_3)w = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} w = 0$$

On a immédiatement

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ 2w_1 \end{pmatrix}$$

on peut donc prendre pour première colonne de P :

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = 5$, si $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ est la solution recherchée, on doit résoudre

$$(M - 5I_3)w = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} w = 0$$

On a immédiatement

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ 2w_1 \end{pmatrix}$$

on peut donc prendre pour première colonne de P :

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \text{ avec}$$

$$MP = PD$$

Pour calculer les puissances de M, on utilise le fait que P étant inversible :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det(P) = 4$$

Pour calculer les puissances de M, on utilise le fait que P étant inversible :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det(P) = 4$$

$$MP = PD \Leftrightarrow M = PDP^{-1}$$

d'où

Pour calculer les puissances de M, on utilise le fait que P étant inversible :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det(P) = 4$$

$$MP = PD \Leftrightarrow M = PDP^{-1}$$

d'où

$$M^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1}) = PD^nP^{-1}$$

Pour calculer les puissances de M, on utilise le fait que P étant inversible :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det(P) = 4$$

$$MP = PD \Leftrightarrow M = PDP^{-1}$$

d'où

$$M^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) = PD^nP^{-1}$$

Il faut donc calculer P^{-1}, pour cela on peut soit utiliser la formule :

$$P^{-1} = \frac{1}{det(P)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

soit résoudre le système

$$PX = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

soit résoudre le système

$$PX = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

On remplace la deuxième ligne par la deuxième plus 2 fois la première :

soit résoudre le système

$$PX = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

On remplace la deuxième ligne par la deuxième plus 2 fois la première :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ 2a + b \end{pmatrix}$$

soit résoudre le système

$$PX = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

On remplace la deuxième ligne par la deuxième plus 2 fois la première :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ 2a+b \end{pmatrix}$$

On divise la deuxième ligne par 4 :

soit résoudre le système

$$PX = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

On remplace la deuxième ligne par la deuxième plus 2 fois la première :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ 2a + b \end{pmatrix}$$

On divise la deuxième ligne par 4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b \end{pmatrix}$$

soit résoudre le système

$$PX = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

On remplace la deuxième ligne par la deuxième plus 2 fois la première :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ 2a+b \end{pmatrix}$$

On divise la deuxième ligne par 4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b \end{pmatrix}$$

On remplace la première ligne par la première moins 1 fois la deuxième :

soit résoudre le système

$$PX = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

On remplace la deuxième ligne par la deuxième plus 2 fois la première :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ 2a+b \end{pmatrix}$$

On divise la deuxième ligne par 4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b \end{pmatrix}$$

On remplace la première ligne par la première moins 1 fois la deuxième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2a-b \\ 2a+b \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Comme D est diagonale

$$D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$M^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme D est diagonale

$$D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$M^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (-3)^n & 5^n \\ -2(-3)^n & 2 \times 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme D est diagonale

$$D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$M^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (-3)^n & 5^n \\ -2(-3)^n & 2 \times 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \times (-3)^n + 2 \times 5^n & -(-3)^n + 5^n \\ -4(-3)^n + 4 \times 5^n & 2 \times (-3)^n + 2 \times 5^n \end{pmatrix}$$

Par définition

$$e^{Mt} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^n M^n}{n!}$$

$$= \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^n}{n!} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \times (-3)^n + 2 \times 5^n & -(-3)^n + 5^n \\ -4(-3)^n + 4 \times 5^n & 2 \times (-3)^n + 2 \times 5^n \end{pmatrix}$$

Par définition

$$e^{Mt} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n M^n}{n!}$$

$$= \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{n!}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\times(-3)^n + 2\times 5^n & -(-3)^n + 5^n \\ -4(-3)^n + 4\times 5^n & 2\times(-3)^n + 2\times 5^n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{n\geqslant 0} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{(-3)^n t^n}{n!} + \frac{1}{2}\frac{5^n t^n}{n!} & \frac{1}{4}\frac{-(-3)^n t^n}{n!} + \frac{1}{4}\frac{5^n t^n}{n!} \\ \frac{-(-3)^n t^n}{n!} + \frac{5^n t^n}{n!} & \frac{1}{2}\frac{(-3)^n t^n}{n!} + \frac{1}{2}\frac{5^n t^n}{n!} \end{pmatrix}$$

Par définition

$$e^{Mt} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^n M^n}{n!}$$

$$= \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^n}{n!} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \times (-3)^n + 2 \times 5^n & -(-3)^n + 5^n \\ -4(-3)^n + 4 \times 5^n & 2 \times (-3)^n + 2 \times 5^n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{n \geqslant 0} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{(-3)^n t^n}{n!} + \frac{1}{2} \frac{5^n t^n}{n!} & \frac{1}{4} \frac{-(-3)^n t^n}{n!} + \frac{1}{4} \frac{5^n t^n}{n!} \\ \frac{-(-3)^n t^n}{n!} + \frac{5^n t^n}{n!} & \frac{1}{2} \frac{(-3)^n t^n}{n!} + \frac{1}{2} \frac{5^n t^n}{n!} \end{pmatrix}$$

d'où

$$e^{Mt} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-3t} + \frac{1}{2} e^{5t} & \frac{-1}{4} e^{-3t} + \frac{1}{4} e^{5t} \\ -e^{-3t} + e^{5t} & \frac{1}{2} e^{-3t} + \frac{1}{2} e^{5t} \end{pmatrix}$$

Le système qu'on veut résoudre est de la forme

$$X'(t) = MX(t)$$

ses solutions sont

$$X(t) = e^{Mt}X(0)$$

on a donc immédiatement :

$$X(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{5t} & \frac{-1}{4}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{5t} \\ -e^{-3t} + e^{5t} & \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le système qu'on veut résoudre est de la forme

$$X'(t) = MX(t)$$

ses solutions sont

$$X(t) = e^{Mt}X(0)$$

on a donc immédiatement :

$$X(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{5t} & \frac{-1}{4}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{5t} \\ -e^{-3t} + e^{5t} & \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{5t} \\ \frac{-3}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{5t} \end{pmatrix}$$

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\det(A)$, et dire si A est inversible.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; écrire la matrice $A - \lambda I_3$, puis calculer $\det(A - \lambda I_3)$ et trouver les valeurs de λ qui annulent ce déterminant.
3. Pour chaque valeur de λ trouvée en 2., déterminer un vecteur-colonne V tel que $(A - \lambda I_3)\, V = 0$.
4. Écrire la matrice P formée par les vecteurs-colonne V déterminés en 3., et calculer P^{-1}.
5. Déterminer la matrice $B = P^{-1} A\, P$.
6. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Comment peut-on calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$?

$det(A) = 0$, car la première et la dernière colonne de A sont les mêmes.

$det(A) = 0$, car la première et la dernière colonne de A sont les mêmes.
A n'est pas inversible.

$det(A) = 0$, car la première et la dernière colonne de A sont les mêmes.
A n'est pas inversible.

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$det(A) = 0$, car la première et la dernière colonne de A sont les mêmes.
A n'est pas inversible.

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\Big((1-\lambda)^2 - 1\Big) = (1-\lambda)(1-\lambda-1)(1-\lambda+1)$$

$$= (-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$$

$det(A) = 0$, car la première et la dernière colonne de A sont les mêmes.
A n'est pas inversible.

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\Big((1-\lambda)^2 - 1\Big) = (1-\lambda)(1-\lambda-1)(1-\lambda+1)$$

$$= (-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$$

La matrice A admet trois valeurs propres simples

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$

Il s'agit de trouver les trois vecteurs propres associés aux trois valeurs propres.

Il s'agit de trouver les trois vecteurs propres associés aux trois valeurs propres.

Pour $\lambda_1 = 0$, on doit résoudre : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x + z & = 0 \\ \quad\;\; y & = 0 \end{cases}$$

On peut prendre

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = 1$, on doit résoudre : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} z & = 0 \\ x + y & = 0 \end{cases}$$

On peut prendre

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_3 = 2$, on doit résoudre : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} -x + z & = 0 \\ -y & = 0 \\ x - z & = 0 \end{cases}$$

On peut prendre

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice P s'obtient en prenant comme colonnes les trois vecteurs propres, on a donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice P s'obtient en prenant comme colonnes les trois vecteurs propres, on a donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son inverse s'obtient en résolvant le système :

$$PX = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

La matrice P s'obtient en prenant comme colonnes les trois vecteurs propres, on a donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son inverse s'obtient en résolvant le système :

$$PX = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ a+c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ a+c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ a+b+c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ a+c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ a+b+c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ \frac{a+b+c}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ a+c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ a+b+c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ \frac{a+b+c}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{c}{2} \\ -b \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ a+c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ a+b+c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ \frac{a+b+c}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{c}{2} \\ -b \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice B est par définition la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres (attention à l'ordre)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice B est par définition la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres (attention à l'ordre)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme B est diagonale on a de manière immédiate :

$$B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Comme

$$A = PBP^{-1}$$

$$A^n = (PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1}) = PB^nP^{-1}$$

Comme

$$A = PBP^{-1}$$

$$A^n = (PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1}) = PB^nP^{-1}$$

on a donc :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Comme

$$A = PBP^{-1}$$

$$A^n = (PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1}) = PB^nP^{-1}$$

on a donc :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2^n \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2^n \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme

$$A = PBP^{-1}$$

$$A^n = (PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1}) = PB^nP^{-1}$$

on a donc :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2^n \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2^n \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 2 & 2^n \\ 0 & 2 & 0 \\ 2^n & 2^n & 2^n \end{pmatrix}$$