

MVA911 - DM n°3 Éléments de correction

Professeur : Rodolphe Touzé

Exercice

Système (Σ) :

$$\begin{cases} x - my + m^2z = 4m \\ mx - m^2y + mz = 4m \\ mx + y - m^2z = 2(1-m) \end{cases}$$

Calcul du déterminant de (Σ) en mettant m en fonction et en utilisant la méthode de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^2 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 1 & -m & 1 \\ m & 1 & -m^2 \end{vmatrix} = m(m^3 - m^2 + m^2 + m^4 - 1 - m^3)$$

$$\det(\Sigma) = m(m^4 - 1) = m(m^2 - 1)(m^2 + 1)$$

$$\det(\Sigma) = m(m - 1)(m + 1)(m^2 + 1)$$

$$\det(\Sigma) = 0 \Leftrightarrow m(m - 1)(m + 1)(m^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow m(m - 1)(m + 1)(m^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m - 1 = 0 \text{ ou } m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = 1 \text{ ou } m = -1$$

Si $m \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$ alors le système (Σ) est un système de Cramer qui admet un unique triplet solution.

* Si $m = -1$ alors

$$\begin{cases} x - my + m^2z = 4m \\ mx - m^2y + mz = 4m \\ mx + y - m^2z = 2(1-m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = -4 \\ -x - y - z = -4 \\ -x + y - z = 4 \end{cases}$$

Si $m = -1$ alors $S = \emptyset$

* Si $m = 0$ alors

$$\begin{cases} x - my + m^2z = 4m \\ mx - m^2y + mz = 4m \\ mx + y - m^2z = 2(1-m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Si $m = 0$ alors $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z) = (0, 2, z)\}$

* Si $m = 1$ alors

$$\begin{cases} x - my + m^2z = 4m \\ mx - m^2y + mz = 4m \\ mx + y - m^2z = 2(1-m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 4 \\ x - y + z = 4 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = x + y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ z = 2 + y \end{cases}$$

Si $m = -1$ alors $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z) = (2, y, 2 + y)\}$

* Si $m \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$:

$$\begin{cases} x - my + m^2z = 4m \\ mx - m^2y + mz = 4m \\ mx + y - m^2z = 2(1-m) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \begin{vmatrix} 4m & -m & m^2 \\ 4m & -m^2 & m \\ 2(1-m) & 1 & -m^2 \end{vmatrix} / (m(m-1)(m+1)(m^2+1)) \\ y = \begin{vmatrix} 1 & 4m & m^2 \\ m & 4m & m \\ m & 2(1-m) & -m^2 \end{vmatrix} / (m(m-1)(m+1)(m^2+1)) \\ z = \begin{vmatrix} 1 & -m & 4m \\ m & -m^2 & 4m \\ m & 1 & 2(1-m) \end{vmatrix} / (m(m-1)(m+1)(m^2+1)) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\begin{vmatrix} 4m & -m & m^2 \\ 4 & -m & 1 \\ 2(1-m) & 1 & -m^2 \end{vmatrix}}{((m-1)(m+1)(m^2+1))} \\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4m & m^2 \\ 1 & 4 & 1 \\ m & 2(1-m) & -m^2 \end{vmatrix}}{((m-1)(m+1)(m^2+1))} \\ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -m & 4m \\ 1 & -m & 4 \\ m & 1 & 2(1-m) \end{vmatrix}}{((m-1)(m+1)(m^2+1))} \end{array} \right.$$

Après développement avec la méthode de Sarrus, factorisation des polynômes en m puis simplification :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2m(m^2+3)/((m+1)(m^2+1)) \\ y = -2(m-1)/(m^2+1) \\ z = 4/(m+1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - my + m^2z = 4m \\ mx - m^2y + mz = 4m \\ mx + y - m^2z = 2(1-m) \end{array} \right. \Leftrightarrow AX = B \text{ avec } \det(A) \neq 0$$

$$AX = B \text{ avec } \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow I_3X = A^{-1}B \\ \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Pour rappel, $A^{-1} = {}^t(A^{CO}) / \det(A)$ soit :

$$\left[\begin{array}{ccc} (m^2+m+1)/((m+1)(m^2+1)) & -m/((m+1)(m^2+1)) & m/(m^2+1) \\ m/((m-1)(m^2+1)) & -m/((m-1)(m^2+1)) & 1/(m^2+1) \\ 1/(m^2-1) & -1/(m(m^2-1)) & 0 \end{array} \right]$$

$$\text{D'où } X = \left[\begin{array}{c} 2m(m^2+3)/((m+1)(m^2+1)) \\ -2(m-1)/(m^2+1) \\ 4/(m+1) \end{array} \right]$$

Résolution du système par la méthode du pivot de Gauss (Gauss-Jordan avant pivot normalisé) pour $m \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$:

$(L_1); (L_3 \leftarrow (mL_1 - L_2) / (m(m^2 - 1))); (L_2 \leftarrow (L_3 - L_2) / (m^2 + 1))$

$$\begin{cases} x - my + m^2z = 4m \\ mx - m^2y + mz = 4m \\ mx + y - m^2z = 4(1-m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - my + m^2z = 4m \\ y - (m^2 + m)z / (m^2 + 1) \\ \quad = 4(1 - 2m) / (m^2 + 1) \\ z = (4m^2 - 4m) / (m(m^2 - 1)) \end{cases}$$

$(L_3);$

$(L_2 \leftarrow L_2 + ((m^2 + m) / (m^2 + 1)) L_3);$

(Isoler x dans L_1).

$$\begin{cases} x = 4m + my - m^2z \\ y = -2(m-1) / (m^2 + 1) \\ z = 4 / (m + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2m(m^2 + 3) / ((m + 1)(m^2 + 1)) \\ y = -2(m-1) / (m^2 + 1) \\ z = 4 / (m + 1) \end{cases}$$
