le cnam

MVA101 - Devoir 3 - Transformation de Fourier

à rendre le 10 janvier 2018

Exercice 1 : Calcul de transformée

Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-a|x|}$.

1. On considère une fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est intégrable et paire. Montrer que :
$$\widehat{g}(\omega) = 2\int_0^{+\infty} g(x)\cos(\omega x)\ dx.$$
2. Se servir de la question précédente pour calculer la transformée de Fourier de f.
3. Avec une valeur de a particulière, en déduire la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+\omega^2}\ d\omega$.

Exercice 2 : Équations différentielles

Partie A :

Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-ax^2}$.

1. Montrer que f est solution de l'équation différentielle : $y'(x) + 2axy(x) = 0$
2. En appliquant la transformation de Fourier à cette équation différentielle, en déduire une équation différentielle vérifiée par $\widehat{f}$.
3. Sachant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, calculer $\widehat{f}(0)$.
4. Montrer que la fonction : $\omega \mapsto \widehat{f}(0)\exp\left(-\dfrac{\omega^2}{4a}\right)$ est solution de l'équation différentielle trouvée à la question 2). En déduire la valeur de $\widehat{f}(\omega)$.

Partie B : Équation de la chaleur

On considère l'équation de la chaleur en une dimension pour une fonction $u(x,t)$ où $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Cette équation modélise l'évolution de la chaleur sur un fil de longueur infinie. La quantité $u(x,t)$ représente la température du fil à l'abscisse x et au temps t.

Précision concernant les notations : $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ correspond à la dérivée première de la fonction u par rapport à la variable de temps t. Et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ correspond à la dérivée seconde de la fonction u par rapport à la variable d'espace x (comprendre comme $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = u''_x(x,t)$)

1. On considère que pour tout temps t, la fonction $x \mapsto u(x,t)$ est intégrable. On pose $\hat{u}(\omega,t)$ sa transformée de Fourier (attention, la transformation de Fourier est faite sur la variable x, pas t). Montrer que $\hat{u}$ vérifie l'équation :
$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t) + \omega^2\hat{u}(\omega,t) = 0$$
2. En déduire que : $\hat{u}(\omega,t) = \hat{u}_0(\omega)\ e^{-\omega^2 t}$

3. On pose $g(\omega, t) = e^{-\omega^2 t}$. À partir de la question précédente, montrer que : $u(x,t) = u_0(x) \star \overline{\mathcal{F}}(g(\omega,t))(x)$

4. En utilisant la fonction $f(x) = e^{-ax^2}$ de la partie A, pour laquelle on remplace a par t et x par ω, et en utilisant le résultat final de la partie A, on obtient dans le cas présent que si $g(\omega, t) = e^{-\omega^2 t}$, alors $\overline{\mathcal{F}}(g(\omega,t))(x) = e^{-\frac{x^2}{4t}} \sqrt{\frac{\pi}{t}}$. En déduire que :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}} \; u_0(x-y) \; dy$$