le cnam

MVA101 - Devoir 1 - Suites et séries

à rendre pour la séance numéro 8, le 22 novembre 2017

Exercice 1 : Suite numérique

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$ puis prouver que $0 < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   (c) En déduire que la suite (u_n) converge.
2. On pose $x_n = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$.
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$
   (b) Déterminer la limite de la suite (x_n).

Exercice 2 : Série numérique

Partie A :

1. Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, il existe au moins un entier que l'on notera n_k (c'est à dire un nombre entier positif qui dépend de k) tel que :
$$(8k-1)\frac{\pi}{4} \leq n_k \leq (8k+1)\frac{\pi}{4}$$
2. Étudier les variations de la fonction $\cos(x)$ pour $x \in \left[(8k-1)\frac{\pi}{4},\ (8k+1)\frac{\pi}{4}\right]$, quel que soit $k \in \mathbb{N}$.
   En déduire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que la suite $(\cos(n_k))_{k\in\mathbb{N}}$ soit minorée par cette constante c.
3. D'après la question précédente, en déduire qu'il existe une constante $c' > 0$ telle que la suite $(\cos^2(n_k))_{k\in\mathbb{N}}$ soit minorée par cette constante c'.
   (On notera pour ce qui suit que $(\cos^2(n_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $\cos^2(n)$).

Partie B :
On considère maintenant la série de terme général :
$$u_n = \frac{\cos(n)}{n^\alpha + \cos(n)}$$
où α est un paramètre réel. Le but est de déterminer la nature de la série de terme général u_n selon la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\alpha > 1$. Montrer que dans ce cas la série de terme général u_n converge absolument.
2. Soit $\dfrac{1}{2} < \alpha \leq 1$.
   (a) En utilisant le théorème d'Abel$^{(*)}$, montrer que la série de terme général $\dfrac{\cos(n)}{n^\alpha}$ converge.
   Indication : Pour montrer que $\sum_{k=0}^{n} \cos(k)$ est bornée on pourra écrire $\cos(k)$ comme la partie réelle

de l'exponentielle complexe : $e^{ik} = \cos(k) + i\sin(k) \iff \cos(k) = Re(e^{ik})$. Ainsi $\sum_{k=0}^{n} \cos(k) = Re\left(\sum_{k=0}^{n} (e^i)^k\right)$ où on reconnaît la partie réelle d'une série géométrique.

(b) Soit le développement limité autour de 0 de la fonction définie par $x \mapsto \frac{1}{1+x}$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x\varepsilon(x)$$

Factoriser l'expression de u_n par $\frac{\cos(n)}{n^\alpha}$ et appliquer le développement limité ci-dessus avec $x = \frac{\cos(n)}{n^\alpha}$ qui tend vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$.

(c) Déduire des deux questions précédentes que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge lorsque $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$.

3. Soit $\alpha = \frac{1}{2}$.

   (a) En utilisant les résultats de la Partie A, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\cos^2(n)}{n} \geq \sum_{k=1}^{K} \frac{\cos^2(n_k)}{n_k} \geq c' \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{n_k} \geq c' \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{8k+1}$$

   où K est tel que $n_K \leq N$ mais tend vers $+\infty$ lorsque $N \longrightarrow +\infty$.
   (chacune des 3 inégalités devra être justifiée).

   (b) En utilisant le développement écrit à la question 2.(b) avec $\alpha = 1/2$, déduire de la question précédente que dans le cas $\alpha = 1/2$ la série de terme général u_n diverge.

(*) **Théorème d'Abel** :
On considère une série de terme général u_n telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n b_n$ où :

1. les sommes $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = b_0 + \cdots + b_n$ restent bornées pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. la suite (a_n) est décroissante.
3. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Alors la série de terme général u_n converge.

Exercice 3 : Suite de fonctions

On considère la suite de fonctions définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$ avec $x \in [0, +\infty[$.

1. Pour $x \in [0, +\infty[$, déterminer la limite simple $f(x)$ de la suite de fonctions (f_n) puis étudier sa convergence uniforme.

   Indication : pour la convergence uniforme de (f_n), on pourra utiliser la suite de fonctions $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$ pour majorer $|f_n(x) - f(x)|$ (on justifiera au passage cette majoration).

2. Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n) avec maintenant $x \in [a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}, a > 0$.

Marco Caponigro et Chloé Mimeau, 08 novembre 2017.