Devoir 2
Corrigé

Exercice 1 : Soit $y(x)$ solution de

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 0. \tag{1}$$

développable en série entière au voisinage de 0, c'est à dire :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots.$$

1. et 2. On commence par calculer les dérivées de y et on a que

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{ et } y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

Puis on remplace y, y' et y'' dans l'équation (1) par les formules ci-dessus et on obtient

$$\begin{aligned} x^2y''(x) - 2xy'(x) &+ (2 - x^2)y(x) = 0 \iff \\ &\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0. \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n,$$

donc

$$\begin{aligned} x^2y''(x) - 2xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 0 &\iff 2a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(n(n-1)a_n x^n - 2na_n + 2a_n - a_{n-2}\right) x^n = 0 \\ &\iff 2a_0 \sum_{n=2}^{\infty} \left((n-1)(n-2)a_n - a_{n-2}\right) x^n = 0, \end{aligned}$$

ce qui est verifié seulement si $a_0 = 0$ et

$$(n-1)(n-2)a_n = a_{n-2}, \tag{2}$$

pour tout $n \geq 2$.

3. Soit $n = 2p + 1$, $p \geq 1$ impaire et $a_1 = \alpha$. Alors (2) devient

$$a_{2p+1} = \frac{1}{2p(2p-1)} a_{2p-1} = \frac{1}{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)} a_{2p-3} = \dots = \frac{1}{(2p)!}\alpha.$$

4. De façon similaire si $n = 2p$, $p \geq 1$ paire et $a_2 = \beta$, de (2) on déduit

$$a_{2p} = \frac{1}{(2p-1)(2p-2)} a_{2p-2} = \frac{1}{(2p-1)(2p-2)(2p-3)(2p-4)} a_{2p-4} = \dots = \frac{1}{(2p-1)!}\beta.$$

5. En utilisant les points 3. et 4. on a que la série $y(x)$ s'écrit sous la forme

$$y(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\alpha \frac{x^{2p+1}}{(2p)!} + \beta \frac{x^{2p+2}}{(2p+1)!} \right).$$

On va considerer $y(x)$ comme somme de deux séries. On étudie d'abord la série

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}.$$

Grâce à la règle de d'Alembert on a que son rayon de convergence est infini car

$$\left| \frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!} \frac{(2p)!}{x^{2p}} \right| = \frac{x^2}{(2p+2)(2p+1)} \to 0 \text{ si } p \to \infty$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, et, en particulier, la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. De façon similaire on peut montrer que la rayon de convergence de

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

est infini aussi. En particulier le rayon de convergence de $y(x)$ est infini et

$$y(x) = \alpha x \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \beta x \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!},$$

our tout $x \in \mathbb{R}$.

6. On reconnait le développement en séries entières des fonctions hyperboliques $\sinh(x)$ et $\cosh(x)$. Car

$$\sinh(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \quad \text{et} \quad \cosh(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}.$$

Donc

$$y(x) = x\left(\alpha \cosh(x) + \beta \sinh(x)\right),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. En plus, dans le cas où $\alpha = \beta$ on a, tout simplement, $y(x) = \alpha x e^x$.

Exercice 2 : On considère les fonctions 2π-périodiques définies par :

$$f(x) = |\sin(x)| \quad \text{et} \quad g(x) = \max\{\sin(x), 0\}.$$

1.(a) Série de Fourier trigonométrique $S(f)$ de f.

On note que la fonction f est paire. Donc les coefficients b_n sont nuls.

On peut donc calculer a_0, ce qui nous donne

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x)dx = \frac{2}{\pi}.$$

Pour calculer a_n on utilise la formule trigonométrique $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$. Or

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin((n+1)x)dx - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin((n-1)x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}((-1)^{n+1}-1) - \frac{1}{n-1}((-1)^{n-1}-1)\right) \end{aligned}$$

Donc si n impaire $a_n = 0$ et si $n = 2p$ paire on a

$$a_{2p} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4p^2-1}.$$

Donc la série de Fourier de f est

$$S(f)(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx).$$

1.(b) Série de Fourier trigonométrique $S(g)$ de g.

Tout d'abord on note que la fonction g est telle que

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in (-\pi, 0], \\ \sin(x) & \text{pour } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

On peut donc calculer a_0, ce qui nous donne

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)dx = \frac{1}{\pi}.$$

Pour calculer a_n on utilise la formule trigonométrique $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$. Or

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin((n+1)x)dx - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin((n-1)x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n+1}((-1)^{n+1}-1) - \frac{1}{n-1}((-1)^{n-1}-1)\right) \end{aligned}$$

Donc si n impaire $a_n = 0$ et si $n = 2p$ paire on a

$$a_{2p} = -\frac{1}{\pi}\frac{2}{4p^2-1}.$$

Pour calculer b_n on utilise la formule trigonométrique $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$. Or

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos((n-1)x) - \cos((n+1)x)dx, \end{aligned}$$

ainsi $b_n = 0$ pour $n \geq 2$ et $b_1 = 1/2$.

Donc la série de Fourier de g est

$$S(g)(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos(2nx) + \frac{1}{2} \sin(x).$$

2. Convergence de $S(f)$ et $S(g)$.

Les fonctions f et g sont 2π-périodiques et C^1 par morceaux. En plus elles sont continues sur $\mathbb{R}$. Par le Théorème de Dirichlet les Série $S(f)$ et $S(g)$ convergent uniformement sur $\mathbb{R}$ (donc simplement pour tout $x \in \mathbb{R}$). De plus

$$S(f)(x) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in]-\pi, \pi[.$$

et

$$S(g)(x) = g(x), \quad \text{pour tout } x \in]-\pi, \pi[.$$

3. Valeurs des séries numériques .

On calcule

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$$

On évalue la série de Fourier de g en $x = \pi/2$. D'apès le point 2. on a

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos(n\pi) + \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} + \frac{1}{2},$$

donc

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Pour calculer

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

on évalue la série de Fourier de g en $x = 0$ et on a

$$0 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1},$$

d'où

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

On calcule

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

On utilise la Formule de Parseval appliquée à g et $S(g)$ et on a

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx = 2|a_0|^2 + \sum_{n \geq 1} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Or

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} |\sin(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} 1 - \cos(2x) dx = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1} + \frac{1}{4},$$

d'où le résultat demandé.