le cnam **Cours d'Analyse et Calcul Matriciel**

Devoir numéro 4

A rendre pour la séance 13, le 04 janvier 2016

1) Transformée de Fourier de la Gaussienne

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $f(t) = \exp(-t^2/2)$. On remarque que l'on a la relation (1) $f'(t) = -t\,f(t)$.

a) En appliquant la transformée de Fourier à l'équation (1), montrer que la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de la fonction f est solution de l'équation différentielle (2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} = -\xi\,y(\xi)$.

b) On admet que la solution générale de l'équation (2) s'écrit $y(\xi) = C\exp(-\xi^2/2)$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$. En déduire que $\widehat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\exp(-\omega^2/2)$ pour tout réel ω.

c) Soit $a > 0$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. On introduit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = g(at)$. Montrer, à l'aide de la définition de transformée de Fourier, que $\widehat{h}(\omega) = \frac{1}{a}\widehat{g}\big(\frac{\omega}{a}\big)$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.

d) On se donne $\sigma > 0$. Déduire des questions précédentes la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}(\omega)$ de la fonction $\varphi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\big(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\big)$.

2) Systèmes linéaires [d'après Marco Caponigro]

On introduit les systèmes linéaires : (1) $\left\{\begin{aligned} x+2y+3z&=6\\ 2x-y+4z&=2\\ 4x+3y-2z&=14\end{aligned}\right.$ (2) $\left\{\begin{aligned} x-3z&=-3\\ 2x+my-z&=-2\\ x+2y+mz&=1\end{aligned}\right.$.

a) Résoudre le système (1).

b) Pour quelles valeurs du paramètre m le système linéaire (2) a-t-il une solution unique ?

c) Dans ce cas achever la résolution du système (2).

3) Calcul de l'inverse d'une matrice [d'après Nathalie Zanon]

On note I la matrice identité à 3 lignes et 3 colonnes : $\mathrm{I} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. On considère la matrice suivante d'ordre 3 également : $A = \begin{pmatrix}2&0&-1\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2 et A^3.

b) Déterminer des nombres a, b et c tels que $A^3 + aA^2 + bA + cI = 0$.

c) En déduire que A est inversible et calculer sa matrice inverse A^{-1}.

François Dubois et Chloé Mimeau, 14 décembre 2016.