MVA107	Devoir n°...
Votre nom et prénom : ...	Votre n° de carte CNAM : ...
Votre groupe d'ED : ... (*jour, heure, salle*)	Nom de l'enseignant d' ED : ...

MVA107 - Devoir n°3

Exercice 1 (d' après examen 2006)

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ et les colonnes :

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La matrice A représente, dans la base canonique, un endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

1. Calculer les produits AW_1 et AW_2. Que peut-on en conclure sur les valeurs propres de f et les vecteurs représentés par W_1 et W_2 ?
2. Vérifier que A possède une valeur propre triple.
3. On considère l'équation :
$$(A - 4I)X = W_1 + b\,W_2$$
dans laquelle X est l'inconnue et b un paramètre réel.
Vérifier que b doit être égal à -1 pour que cette équation ait des solutions. La résoudre pour la valeur de $b = -1$ et déterminer la solution V_3 pour laquelle $y = z = 0$.
4. On pose $V_2 = W_1 - W_2$, déduire des calculs précédents que (W_1, V_2, V_3) est une base de Jordan (base ayant la propriété que l'endomorphisme f est représenté par une matrice de Jordan J dans cette base).
On donnera P, la matrice de passage de la base canonique à la base de Jordan et J.
5. Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ et préciser ce que représentent les trois constantes introduites dans la résolution.

Exercice 2(d' après examen 2006)

Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ admettant dans une certaine base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ l'expression :

$$Q(u) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$$

1. Déterminer la matrice symétrique M qui représente, dans la base $\mathcal{B}$, la forme bilinéaire symétrique S associée à Q.
2. Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de M ? La forme bilinéaire symétrique S est-elle un produit scalaire ?
3. Déterminer une matrice orthogonale R (donc telle que ${}^tR = R^{-1}$) dont les colonnes sont des vecteurs propres qui diagonalisent la forme quadratique Q. En déduire une expression de Q comme somme ou différence de carrés.
4. *facultatif* Par un procédé au choix (Schmidt ou Gauss), déterminer une base orthonormée pour la forme bilinéaire symétrique S dont on donnera l'expression en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}$.