SITI, Dep^{t}. IMATH

CSC105

QCM sur les pré-requis

Pour suivre ce cours, vous aurez besoin de certaines *connaissances mathématiques* que l'on s'efforcera de vous rappeler au fur et à mesure mais il est fortement conseillé de revoir celles qui vous semblent trop lointaines.

Voici quelques tests pour vous aider à évaluer votre niveau.

Ce sont

- soit des questions de cours,
- soit des questions de déduction à partir du cours, ne nécessitant pas de calcul mais un peu de réflexion pour déterminer la bonne réponse et/ou éliminer les réponses incorrectes.
- soit des questions nécessitant quelques calculs intermédiaires pour déduire les résultats (munissez vous de papier et crayons)

Vous devez pouvoir y répondre sans regarder le cours.
Si cela n'est pas encore le cas, revoyez le cours, comprenez bien les réponses et recommencez le QCM dans quelques temps, sans le cours.

Instructions pour un QCM :
Pour débuter l'exercice, cliquer sur **Début**, puis
pour chaque question, cliquer sur la case de la réponse qui vous semble correcte (vous pouvez modifier votre réponse en cliquant sur une autre case),
enfin, cliquer sur **Fin** pour avoir votre note (1 point par question).

Cliquer pour accéder :

- Test sur les complexes (quelques rappels)
- Test sur les matrices
- Test sur les séries (quelques rappels)
- Test sur l'intégration (quelques rappels)
- Test sur les équations différentielles

Début du QCM sur les complexes

(cliquer sur l'encadré pour commencer)

Soient x, y, r des réels, i l'imaginaire pur et le complexe $z = x + i\,y$.

1. Cocher une relation correcte ?

- ☐ $i^2 = 1$
- ☐ $i^2 = -1$
- ☐ $i^2 = -i$

2. Que vaut r, le module de z ?

- ☐ $\sqrt{x^2 + y^2}$
- ☐ $x + y$
- ☐ x

3. Que vaut θ, la phase de z ? :

- ☐ y
- ☐ $tan(x/y)$
- ☐ $Atan(y/x)$

4. Que vaut $\bar{z}$, le complexe conjugué de z ?

- ☐ $x - i\,y$
- ☐ $r\,e^{-\,i\,\theta}$
- ☐ $r\,e^{2\,i\,\theta}$

5. Que vaut z^n (n entier) ?

- ☐ $x^n + i\,y^n$
- ☐ $r^n e^{i\,n\,\theta}$
- ☐ $r^n(cos(n\theta) + i\,sin(n\theta))$

6. Que vaut $z - \bar{z}$?

- ☐ $2r$
- ☐ $2x$
- ☐ $2\;i\;y$

7. Que vaut $z\,\bar{z}$?

- [ ] x^2
- [ ] r^2
- [ ] 1

8. Indiquer la partie relle, $Re(z)$), et la partie imaginaire, $Im(z)$, de z :

(a) $z = (3+4i) + (1-2i)$

$\square \begin{cases} Re(z) = 3 \\ Im(z) = 8 \end{cases}$ $\square \begin{cases} Re(z) = 11 \\ Im(z) = -2 \end{cases}$ $\square \begin{cases} Re(z) = 4 \\ Im(z) = 2 \end{cases}$

(b) $z = (3+4i)(1-2i)$

$\square \begin{cases} Re(z) = 3 \\ Im(z) = 8 \end{cases}$ $\square \begin{cases} Re(z) = 11 \\ Im(z) = -2 \end{cases}$ $\square \begin{cases} Re(z) = 4 \\ Im(z) = 2 \end{cases}$

(c) $z = \dfrac{3+4i}{1-2i}$

$\square \begin{cases} Re(z) = -1 \\ Im(z) = 2 \end{cases}$ $\square \begin{cases} Re(z) = 11 \\ Im(z) = -2 \end{cases}$ $\square \begin{cases} Re(z) = 4 \\ Im(z) = 2 \end{cases}$

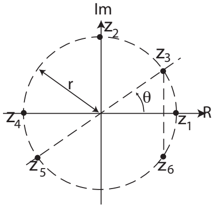
(d) $z = log(re^{i\,\theta})$

☐ $\begin{cases} Re(z) = log(r)cos(\theta) \\ Im(z) = log(r)sin(\theta) \end{cases}$

☐ $\begin{cases} Re(z) = log(r) \\ Im(z) = \theta \end{cases}$

☐ $\begin{cases} Re(z) = log(r) \\ Im(z) = log(\theta) \end{cases}$

9. Cocher les bonnes expressions des complexes représentés dans le plan complexe ci-contre ($r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in \mathbb{R}^+$)



(a)	☐ $z_2 = re^{i\theta}$	☐ $z_2 = r$	☐ $z_2 = -r$	☐ $z_2 = i\ r$	☐ $z_2 = re^{i\,\frac{\pi}{2}}$
(b)	☐ $z_4 = r$	☐ $z_4 = -r$	☐ $z_4 = i\ r$	☐ $z_4 = re^{i\theta}$	☐ $z_4 = re^{i\pi}$
(c)	☐ $z_5 = re^{-i\theta}$	☐ $z_5 = z_6^*$	☐ $z_5 = z_3^*$	☐ $z_5 = re^{i\theta+i2\pi}$	☐ $z_5 = re^{i\theta+i\pi}$

Fin du QCM (cliquer pour avoir votre score) Pourcentage :

Pour avoir la correction de ce test, cliquez sur correction et retournez aux pages des questions du test pour voir les corrections.
[7]qz1

Legende de la correction :
✘ : votre réponse était incorrecte,
✔ : votre réponse était correcte,
● indique une solution correcte.

Début du QCM sur les matrices (cliquer sur l'encadré pour commencer)

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Cocher les réponses correctes :

(a) Que vaut le déterminant de A ?

☐ $det(A) = 3$ ☐ $det(A) = 2$ ☐ $det(A) = 1$ ☐ $det(A) = 0$

(b) Quelles sont les valeurs propres de A ?

☐ aucune ☐ 0 ☐ $1, 2$ ☐ $0, 1, 2$

(c) A est-elle inversible ?

☐ oui ☐ non

(d) Que vaut le déterminant de B ?

☐ $det(B) = 3$ ☐ $det(B) = 2$ ☐ $det(B) = 1$ ☐ $det(B) = 0$

(e) Quelles sont les valeurs propres de B ?

☐ aucune ☐ 0 ☐ $1, 2$ ☐ $0, 1, 2$

(f) B est-elle diagonalisable ?

☐ oui ☐ non

2. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Cocher les réponses correctes :

(a) Que vaut le déterminant de A ?

☐ $det(A) = -1$ ☐ $det(A) = 0$ ☐ $det(A) = 1$ ☐ $det(A) = 2$

(b) Quelles sont les valeurs propres de A ?

☐ aucune ☐ 1 ☐ $1, -1$ ☐ $i, -i$

(c) A est-elle inversible ?

☐ oui ☐ non

(d) A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?

☐ oui ☐ non

(e) Que vaut le déterminant de B ?

☐ $det(B) = 4$ ☐ $det(B) = 2$ ☐ $det(B) = 1$ ☐ $det(B) = 0$

(f) Quelles sont les valeurs propres de B ?

☐ aucune ☐ $1, 2$ ☐ $2, 4$ ☐ $0, 4$

(g) B est-elle inversible ?

☐ oui ☐ non

(h) B est-elle diagonalisable ?

☐ oui ☐ non

3. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Cocher les réponses correctes :

(a) Quelles sont les valeurs propres de A ?

☐ $0, 3$ ☐ $1, 3$ ☐ $2, 3$ ☐ $-2, 3$

(b) Un vecteur propre associé à la valeur propre 3 est :

☐ $(1, 0)$ ☐ $(3, 2)$ ☐ $(2, 3)$ ☐ $(1, 1)$

Fin du QCM (cliquer pour avoir votre score) Pourcentage :

Pour avoir la correction de ce test, cliquez sur correction et retournez aux pages des questions du test pour voir les corrections.
[7]qalg

Legende de la correction :
✘ : votre réponse était incorrecte,
✔ : votre réponse était correcte,
● indique une solution correcte.

Début du QCM sur les séries (cliquer sur l'encadré pour commencer)

1. Etudier la nature (convergente ou divergente) de la série de terme général u_n pour

(a) $u_n = \dfrac{4}{3^n}$ ☐ convergente ☐ divergente

(b) $u_n = \dfrac{1}{n}$ ☐ convergente ☐ divergente

(c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ ☐ convergente ☐ divergente

(d) $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n}$ ☐ convergente ☐ divergente

(e) $u_n = \dfrac{2n - 1}{n^3 + 3}$ ☐ convergente ☐ divergente

(f) $u_n = \dfrac{2}{\sqrt{2n+3}}$ ☐ convergente ☐ divergente

(g) $u_n = cos(\dfrac{1}{\sqrt{2n}})$ ☐ convergente ☐ divergente

(h) $u_n = \dfrac{sin(an)}{n^2}$ ☐ convergente ☐ divergente

2. Indiquer le rayon de convergence de la série entière

(a) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n$ ☐ $R = 1$ ☐ $R = +\infty$ ☐ $R = 2$

(b) $\sum_{n\geq 0} n^2 x^n$ ☐ $R = 1$ ☐ $R = +\infty$ ☐ $R = 2$

(c) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2^n}$ ☐ $R = 1$ ☐ $R = +\infty$ ☐ $R = 2$

(d) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$ ☐ $R = 1$ ☐ $R = +\infty$ ☐ $R = 3$

(e) $\sum_{n\geq 0} n! x^n$ ☐ $R = 0$ ☐ $R = +\infty$ ☐ $R = 1$

(f) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+4n-1}{n!} x^n$ ☐ $R = 1$ ☐ $R = +\infty$ ☐ $R = 2$

3. Indiquer la somme de la série entière

(a) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} =$ ☐ $\frac{1}{1-x}$ ☐ $ln(1-x)$ ☐ e^x

(b) $\sum_{n\geq 0} x^n =$ ☐ $\frac{1}{1-x}$ ☐ $ln(1-x)$ ☐ e^x

(c) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1} =$ ☐ $cos(x)$ ☐ $ln(1-x)$ ☐ e^x

(d) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} =$ ☐ $cos(x)$ ☐ $ln(1-x)$ ☐ e^x

(e) $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} =$ ☐ $cos(x)$ ☐ $sin(x)$ ☐ $Arctan(x)$

Fin du QCM (cliquer pour avoir votre score) Pourcentage :

Pour avoir la correction de ce test, cliquez sur correction et retournez aux pages des questions du test pour voir les corrections.
[7]qserie

Legende de la correction :
✘ : votre réponse était incorrecte,
✔ : votre réponse était correcte,
● indique une solution correcte.

Début du QCM sur l'intgration (cliquer sur l'encadré pour commencer)

Cocher les réponses correctes , a, b et A sont des nombres réels :

1. $a \neq 0, \quad \int_{-A}^{A} sin(ax)dx =$

- ☐ non définie
- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2π

2. $a \neq 0, \quad \int_{0}^{\infty} sin(ax)dx =$

- ☐ non définie
- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2π

3. $a \neq 0, \quad \int sin(ax)cos(ax)dx =$

- ☐ $cos(ax)^2$
- ☐ $cos(ax)$
- ☐ $\dfrac{(sin(ax))^2}{2a}$
- ☐ $\dfrac{(cos(ax))^2}{2a}$

4. $a \neq 0, \quad \int e^{i\,a\,x}dx =$

- ☐ $-\dfrac{e^{i\,a\,x}}{a}$
- ☐ $-i\dfrac{e^{i\,a\,x}}{a}$
- ☐ $-a\,e^{i\,a\,x}$

5. $a \neq 0, \quad \int_{-A}^{A} e^{i\,a\,x}\,dx =$

☐ $\dfrac{2sin(a\,A)}{a}$ ☐ 0 ☐ $\dfrac{e^{i\,a\,A}}{a}$

6. $\int e^{ibx}e^{iax}\,dx =$

☐ $\frac{1}{a+b}(cos((a+b)x) + isin((a+b)x)$ ☐ $\frac{1}{a+b}(sin((a+b)x) - icos((a+b)x)$

7. $a \neq 0, \quad \int (x^2 + bx + 1)e^{i\,a\,x}\,dx =$

☐ $[x^2 + (b - \frac{2}{ia})x + 1 - \frac{2}{a^2} - \frac{b}{ia}]\dfrac{e^{i\,a\,x}}{ia} + A$ ☐ $-[\frac{x^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + x]\dfrac{e^{i\,a\,x}}{a} + A$

Fin du QCM (cliquer pour avoir votre score) Pourcentage :

Pour avoir la correction de ce test, cliquez sur correction et retournez aux pages des questions du test pour voir les corrections.
[7]qintegr

Legende de la correction :
✘ : votre réponse était incorrecte,
✔ : votre réponse était correcte,
● indique une solution correcte.

Début du QCM sur les équations différentielles

(cliquer sur l'encadré pour commencer)

On note : A et B des constantes quelconques, $y'(t) = \frac{dy}{dt}(t)$, $y''(t) = \frac{d^2y}{dt^2}(t)$.
Cocher les réponses correctes :

1. Quelle est la solution de $y'(t) + y(t) = 0$?

- ☐ $y(t) = A$
- ☐ $y(t) = Ae^{-t}$
- ☐ $y(t) = Ae^{t}$

2. Quelle est la solution de $y'(t) + y(t) = 3$?

- ☐ $y(t) = 3 + Ae^{-t}$
- ☐ $y(t) = 3Ae^{-t}$
- ☐ $y(t) = Ae^{-t} + 3t$

3. Quelle est la solution de $y'(t) + y(t) = t$?

- ☐ $y(t) = t + Ae^{-t}$
- ☐ $y(t) = t - 1 + Ae^{-t}$
- ☐ $y(t) = A(t+1)e^{-t}$

4. Quelle est la solution de $y'(t) + y(t) = e^{-t}$?

- ☐ $y(t) = t + Ae^{-t}$
- ☐ $y(t) = t - 1 + Ae^{-t}$
- ☐ $y(t) = A(t+1)e^{-t}$

5. Quelle est la solution de $y'(t) + y(t) = t + e^{-t}$?

☐ $y(t) = t + Ae^{-t}$ ☐ $y(t) = t - 1 + Ae^{-t}$ ☐ $y(t) = A(t+1)e^{-t} + t - 1$

6. Quelle est la solution de $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0$?

☐ $y(t) = Ae^{it} + Be^{-it}$ ☐ $y(t) = Ae^{t} + Be^{-t}$ ☐ $y(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$

7. Quelle est la solution de $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$?

☐ $y(t) = Ae^{it} + Be^{-it}$ ☐ $y(t) = Ae^{t} + Be^{-t}$ ☐ $y(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$

Fin du QCM (cliquer pour avoir votre score) Pourcentage :

Pour avoir la correction de ce test, cliquez sur correction et retournez aux pages des questions du test pour voir les corrections.
[7]qeqd

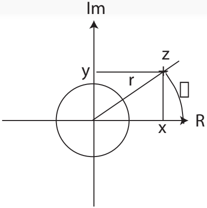
Legende de la correction :
✘ : votre réponse était incorrecte,
✔ : votre réponse était correcte,
● indique une solution correcte.

C’est tout pour le moment en QCM.

Suivez les conseils donnés et continuez réviser

Bon travail

Petit rappel de cours sur les complexes



Soient i l'*unit imaginaire* et z un nombre complexe,

i est la racine carrée canonique de -1 (ou encore $i^2 = -1$).

Les représentations :

- la représentation cartésienne : $z \;=\; x + i\,y$,
  avec x la *partie réelle* de z et y sa *partie imaginaire*,
- la représentation polaire : $z \;=\; r\,e^{i\theta} \;=\; r\,(cos(\theta) + i\,sin(\theta))$,
  avec r le *module* de z et θ sa *phase*
  (on rappelle la *relation d'Euler* : $e^{i\theta} = cos(\theta) + i\,sin(\theta)$).
  La phase est définie modulo 2π puisque $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Egalité de 2 complexes : $\quad z = x + i\,y = r\,e^{i\theta}, \quad z' = x' + i\,y' = r'\,e^{i\theta'}$

- ils ont même partie réelle et même partie imaginaire : $z = z' \Leftrightarrow (x = x', y = y')$
- ils ont même module et même phase (modulo 2π) : $z = z' \Leftrightarrow (r = r', \theta = \theta'[2\pi])$

Opérations : comme dans $\mathbb{R}$ en utilisant $i^2 = -1$ et $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ pour distinguer partie réelle et partie imaginaire, ou les propriétés de l'exponentielle (pour le polaire).

Complexe conjugé z^* de $z \;=\; x + i\,y$: $z^* \;=\; x - i\,y \;=\; re^{-i\,\theta}$

$$z + z^* = 2Re(z) = 2x \quad , \quad z - z^* = 2Im(z) = 2y$$

$$z\,z^* = |z|^2 = r^2 \quad , \quad \frac{z}{z^*} = \frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}} = e^{i2\theta}$$

Logarithme de z : $log(z) = log(re^{i\theta}) = log(r) + i\theta$

Suite de fonctions et convergence :

(f_n) une suite de fonctions définies sur D_f et $[a, b] \subset D_f$,

Convergence ponctuelle (ou simple) :

- la suite converge ponctuellement (ou simplement) en $x \in [a, b]$ si la $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existe et est finie en $x \in [a, b]$.
- si la suite converge ponctuellement en x, $\forall x \in [a, b]$, la suite (f_n) converge ponctuellement vers la fonction f définie sur $[a, b]$ par $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, ce qui s'écrit : $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \forall x \in [a, b]$
- *Remarque :* la continuité des f_n n'implique pas la continuité de la limite f.

Convergence uniforme :

- la suite converge uniformément sur $[a, b]$ si $\lim\limits_{n\to\infty} sup_{x\in[a,b]}(|f_n(x) - f(x)|) = 0$
- si la suite converge uniformément alors elle converge ponctuellement.
- la continuité des f_n implique la continuité de la limite f ;
  donc si les f_n sont continues et la limite f est discontinue, la convergence n'est pas uniforme.
- si convergence uniforme alors, pour $[a, b]$ borné,
  $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

- si les f_n sont $C^1([a,b])$, si (f'_n) converge uniformément vers g sur $[a,b]$, si $\exists c \in [a,b]$ tq $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(c) = l_c$, alors (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$ avec $g = f'$ et $f(c) = l_c$: *la fonction dérivée de la limite est égale à la fonction limite des dérivées*.

Série numérique :

la série de terme général u_k est $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$

- la série est dite convergente si la suite des sommes finies $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ converge vers une valeur finie, alors appelée somme de la série.
- si la série converge alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$; donc si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, la série diverge. attention : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ n'est pas une condition suffisante de convergence de la série.
- si 2 séries sont convergentes, la série somme converge vers la somme des sommes.
- si 2 séries sont convergentes, la série produit converge vers le produit des sommes.

Suite géométrique de raison a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \text{ la série } \sum_{k=0}^{\infty} a^k \begin{cases} \text{converge vers } \dfrac{1}{1-a} \text{ pour } |a| < 1 \\ \text{diverge pour } |a| \geq 1 \end{cases}$$

Série de Riemann $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ $\begin{cases} \text{converge pour } \alpha > 1 \\ \text{diverge pour } \alpha \leq 1 \end{cases}$,

la série harmonique $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge donc.

Série à termes positifs :

- si $0 \leq u_n \leq v_n$ ou si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ $\forall n \geq n_o$ alors

  $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ converge $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge et $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} v_k$ diverge
- si $0 \leq k \leq \dfrac{u_n}{v_n} \leq k'$ ou si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l \neq 0$ alors les 2 séries sont de même nature.

▷ Règle de d'Alembert : si $u_n > 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ alors

$$\begin{cases} \text{si } 0 \leq l < 1, \text{ la série converge,} \\ \text{si } l > 1, \text{ la série diverge.} \end{cases}$$

(si l=1 on ne peut conclure par cette règle)

▷ Règle de Cauchy : si $u_n > 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^{1/n} = l$ alors

$$\begin{cases} \text{si } 0 \leq l < 1, \text{ la série converge} \\ \text{si } l > 1, \text{ la série diverge.} \end{cases}$$

(si l=1 on ne peut conclure par cette règle)

Série à termes complexes : $u_n = a_n + i\, b_n$

▷ la convergence de $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k \quad \Leftrightarrow \quad$ les convergences de $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ et $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$

▷ si la série est absolument convergente ($\sum\limits_{k=0}^{\infty} |u_k|$ convergente) alors la série est convergente.

▷ en polaire $u_n = \rho_n v_n$ avec $\rho_n > 0$, si, pour tout n entier, $|\sum\limits_{k=0}^{n} v_k| \leq Cte$ (indpendante de n) et si la suite (r_n) est décroissante de limite 0, alors la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ est convergente.

Série entière : (réelle ou complexe)

- le rayon de convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, est le nombre $R \geq 0$ (qui peut être infini) tel que la série converge absolument pour tout z vérifiant $|z| < R$, et diverge sinon.
- Lemme d'Hadamard :par le critère de d'Alembert (ou de Cauchy) :

  si $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = a$ (ou $\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = a$) alors $R = 1/a$
- la somme de 2 séries entières, de rayon de convergence respectivement R_1 et R_2, est une série entière de rayon de convergence $R = inf(R_1, R_2)$ si $R_1 \neq R_2$, ou $R \geq R1 = R2$.
- $\forall N$ entier, la somme finie $S_N(z) = \sum_{k=0}^{N} a_n z^n$ converge uniformément vers

  $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ sur $[-r, r]$ pour tout r, tel que $0 < r < R$.
- la fonction $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ est continue et indéfiniment continuement dérivable sur $]-R, R[$.

- la série $p$me-dérivée $S^{(p)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+p)!}{p!k!} a_k z^k$ a même rayon de convergence que $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.
- la série dérivée $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ a même rayon de convergence que $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ et sa somme, fonction dérivable sur $]-R, R[$ est égale $S'(z)$,
  $S'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$.

Primitives $\int f(x)dx$ **:**

pour f définie sur $I \subset \mathbb{R}$

- F, une primitive de f sur I est une fonction dérivable vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout x intérieur I.
- Si F est une primitive de f, $F+$ Constante est aussi une primitive de f.

Intégrales :

Intégrale sur un intervalle borné : pour f définie sur $[a, b]$ intervalle borné,

- Si f est continue sur $[a, b]$ (ou continue par morceaux) alors $\int_a^b f(x)dx$ est définie.
- si f admet une primitive F sur $[a, b]$ alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Intégrale généralise : $\int_a^\infty f(x)dx$ ou $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ ou $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$:

- si f définie sur $[a, \infty[$ et $|\lim_{A\to\infty} \int_a^A f(t)dt| < \infty$: l'intégrale est convergente

(sinon diverge).

Intégrale généralisée : $\int_a^b f(x)dx$ pour f définie sur $[a, b[$ ou $]a, b]$ ou $]a, b[$

- si f définie sur $[a, b[$ et $|\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt| < \infty$: l'intégrale est convergente

(sinon diverge).

Critères de convergence (ou divergence) :

- Riemann :
  $\int_a^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge pour $\alpha > 1$ (sinon diverge),
  $\int_0^{b} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge pour $\alpha < 1$ (sinon diverge)
- majoration : si $\forall x \in [a, b]$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$ alors $0 \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$,
  donc :
  si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge et si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, $\int_a^b g(t)dt$ aussi.
- comparaison : si f et g définie sur $[a, b[$ et $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
  alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Calcul de $\int_a^b f(x)dx$ lorsqu'elle converge :

- par les primitives : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

- par changement de variables : $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))\ u'(t)dt$
  avec $x = u(t)$ o u est une fonction définie sur $[\alpha, \beta]$, dérivable et bijective de $[\alpha, \beta]$ sur $[a, b]$ et telle que $u(\alpha) = a$ et $u(\beta) = b$.
- par intégration par parties : $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$
  (découle de la formule de dérivation d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$)