le cnam **Analyse et Calcul Matriciel**

Cours 8 Séries de Fourier (2)

- Quelques exemples

$$\cos\left(\frac{4\pi x}{T}\right)+\sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right),\ x\in\mathbb{R}$$
$$\mathrm{e}_k(t)=\exp\left(\frac{2ik\pi t}{T}\right),\qquad t\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}.$$
$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right), x\in\mathbb{R}$$
$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\exp\left(\frac{2i\pi n x}{T}\right), x\in\mathbb{R}.$$

- Fonctions périodiques de carré intégrable sur leur période

On se donne un nombre réel T strictement positif. Une fonction f périodique et de période T est dite de carré intégrable si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$ est finie. On note alors $f\in \mathrm{L}^2(0,T)$.

- Espace des fonctions de carré intégrable

L'espace $\mathrm{L}^2(0,T)$ des fonctions de carré intégrable est un espace vectoriel. La somme de deux fonctions de carré intégrable est de carré intégrable et le produit d'une fonction de carré intégrable par un scalaire est encore de carré intégrable : si f et g appartiennent à $\mathrm{L}^2(0,T)$ et $\lambda\in\mathbb{C}$, alors $(f+g)\in\mathrm{L}^2(0,T)$ et $\lambda f\in\mathrm{L}^2(0,T)$.

- Produit scalaire

Si f et g appartiennent à $\mathrm{L}^2(0,T)$, le nombre complexe $\int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$. est toujours bien défini et on pose $(f\,,g)=\displaystyle\int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$.
On remarque que $(\mathrm{e}_k\,,\mathrm{e}_\ell)=0$ si $\ell\neq k$ et $(\mathrm{e}_k\,,\mathrm{e}_k)=T$.

- Quelques propriétés du produit scalaire

Pour f, g, h appartenant à $\mathrm{L}^2(0,T)$ et $\lambda\in\mathbb{C}$, on a $(f+g\,,h)=(f\,,h)+(g\,,h)$, $(f\,,g+h)=(f\,,g)+(f\,,h)$, $(\lambda f\,,g)=\lambda\,(f\,,g)$, $(f\,,\lambda g)=\overline{\lambda}\,(f\,,g)$, $(g\,,f)=\overline{(f\,,g)}$. De plus, $(f\,,f)\geq 0$ et si $(f\,,f)=0$, alors la fonction f est (essentiellement) nulle.

- Norme

Pour $f\in\mathrm{L}^2(0,T)$, on pose $\parallel f\parallel=\sqrt{(f\,,f)}=\sqrt{\int_0^T|f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$. L'application de $\mathrm{L}^2(0,T)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $\mathrm{L}^2(0,T)\ni f\longmapsto\parallel f\parallel\in\mathbb{R}$ est une norme sur l'espace $\mathrm{L}^2(0,T)$. La norme est positive : $\parallel f\parallel\geq 0$. Si $\parallel f\parallel=0$, alors $f=0$. Si λ est un nombre complexe et si $f\in\mathrm{L}^2(0,T)$, alors $\parallel\lambda f\parallel=|\lambda|\ \parallel f\parallel$. Enfin, pour f et g dans l'espace $\mathrm{L}^2(0,T)$, on a l'inégalité triangulaire $\parallel f+g\parallel\leq\parallel f\parallel+\parallel g\parallel$.

- Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour f et g dans l'espace $\mathrm{L}^2(0,T)$, on a $|(f\,,g)|\leq\parallel f\parallel\parallel g\parallel$. De plus, si on est dans le cas d'égalité, c'est à dire si $|(f\,,g)|=\parallel f\parallel\parallel g\parallel$, alors les deux fonctions f et g sont proportionnelles : il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ de sorte que pour tout $t\in[0,T]$, $f(t)=\lambda\,g(t)$.

François Dubois et Chloé Mimeau, 16 novembre 2016.

- Théorème de Pythagore

Si $(f\,,g)=0$, alors $\| f+g \|^2 = \| f \|^2 + \| g \|^2$.

- Sous-espace des polynômes trigonométriques

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 0. On note E_N le sous-espace de $\mathrm{L}^2(0,T)$ des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N. Une fonction $g_N(t)$ qui appartient à E_N s'écrit de façon unique sous la forme $g_N(t) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{k=N} a_k\, \mathrm{e}_k(t) = \sum_{k=-N}^{k=N} a_k \exp\Big(\frac{2\,i\,k\,\pi\,t}{T}\Big)$, où les coefficients a_k $(-N \leq k \leq N)$ forment une famille de $(2N+1)$ nombres complexes indépendants.

- Projecteur sur les polynômes trigonométriques

Si $f \in \mathrm{L}^2(0,T)$, il existe un unique polynôme trigonométrique $S_N(f) \in E_N$ de sorte que pour tout $g \in E_N$, $(f - S_N(f)\,,g) = 0$. On a $S_N(f) = \sum_{k=-N}^{k=N} a_k(f)\,\mathrm{e}_k$ où les nombres $a_k(f)$ sont les coefficients de Fourier de la fonction f : $a_k(f) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t) \exp\big(-\frac{2\,i\,k\,\pi\,t}{T}\big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}(f\,,\mathrm{e}_k)$.
On remarque que les coefficients de Fourier $a_k(f)$ ne dépendent pas de l'indice N de l'espace E_N.

- Inégalité de Bessel-Parseval

Pour $f \in \mathrm{L}^2(0,T)$ et $S_N(f) \in E_N$ défini au point précédent, on a l'inégalité $\| S_N(f) \| \leq \| f \|$, c'est à dire $\displaystyle\sum_{|k|\leq N} |a_k|^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T |f|^2\,\mathrm{d}t$.
La série de terme général $|a_k|^2$ (indexée par $k \in \mathbb{Z}$) converge et on a en passant à la limite dans l'inégalité précédente : $\displaystyle\sum_{|k|\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T |f|^2\,\mathrm{d}t$.

- Théorème de Parseval

Soit $T>0$ et $f \in \mathrm{L}^2(0,T)$. La suite de fonctions $S_N(f)$ converge vers f dans l'espace $\mathrm{L}^2(0,T)$: $\| S_N(f) - f \|$ tend vers 0 si l'entier N tend vers l'infini. On peut alors écrire : $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(f)\,\mathrm{e}_k$ qui signifie que la norme de la différence $\big(f - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(f)\,\mathrm{e}_k\big)$ est nulle.
En pratique, on peut écrire, pour toute fonction $g \in \mathrm{L}^2(0,T)$, l'égalité des produits scalaires : $(f\,,g) = (\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(f)\,\mathrm{e}_k\,,g)$. En particulier, les deux fonctions f et $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(f)\,\mathrm{e}_k$ ont même norme et on a l'égalité de Bessel-Parseval :

$$\sum_{|k|\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f|^2\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas où on utilise la base réelle de $\mathrm{L}^2(0,T)$ des fonctions sinus et cosinus, on a $\alpha_0(f) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ et si $k \geq 1$, $\alpha_k(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\cos\Big(\frac{2\,k\,\pi\,t}{T}\Big)\,\mathrm{d}t$,
$\beta_k(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\sin\Big(\frac{2\,k\,\pi\,t}{T}\Big)\,\mathrm{d}t$. L'égalité de Bessel-Parseval prend alors la forme

$$|\alpha_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\big(|\alpha_k(f)|^2 + |\beta_k(f)|^2\big) = \frac{1}{T}\int_0^T |f|^2\,\mathrm{d}t.$$