

Cours 7 Séries de Fourier (1)

- Quelques exemples

$$\cos(2x) + \sin x, x \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \sin(nx), x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} e^{inx}, x \in \mathbb{R}.$$

- Polynôme trigonométrique

On se donne un entier $N \geq 1$, une famille de $2N + 1$ réels (ou de complexes) α_k pour $0 \leq k \leq N$ et β_k pour $1 \leq k \leq N$. Un polynôme trigonométrique est une fonction g périodique et de période 2π de la forme $g(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^N (\alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt))$.

- Calcul des coefficients

On a $\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt$ et si $k \geq 1$, $\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos(kt) dt$, $\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin(kt) dt$.

Dans les expressions précédentes, on peut remplacer toutes les intégrales entre 0 et 2π par des intégrales entre $-\pi$ et π .

- Ecriture complexe d'un polynôme trigonométrique

Un polynôme trigonométrique g peut aussi s'écrire $g(t) = \sum_{k=-N}^N a_k \exp(ikt)$. On a les relations suivantes entre les coefficients : $a_0 = \alpha_0$ et si $k \geq 1$, $a_k = \frac{1}{2}(\alpha_k - i\beta_k)$, $a_{-k} = \frac{1}{2}(\alpha_k + i\beta_k)$. Les coefficients a_k pour k entier tel que $-N \leq k \leq N$ s'obtiennent *via* la relation

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \exp(-ikt) dt.$$

- Parité

Un polynôme trigonométrique pair n'a que des termes en cosinus et un polynôme trigonométrique impair n'a que des termes en sinus. Le polynôme trigonométrique $g(t)$ est une fonction paire [respectivement impaire] de la variable t si et seulement si $\beta_k = 0$ [respectivement $\alpha_k = 0$] pour tout k .

- Coefficients de Fourier d'une fonction périodique

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , périodique de période 2π : $f(t + 2\pi) = f(t)$ pour tout nombre réel t . Les coefficients de Fourier $\alpha_k(f)$ et $\beta_k(f)$ sont

$$\text{définis par } \alpha_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

$$\text{et si } k \geq 1, \alpha_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt, \beta_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt.$$

- Série de Fourier d'une fonction périodique

Avec les hypothèses précédentes, on se donne un entier $N \geq 1$. On définit la somme partielle de la série de Fourier de f grâce au polynôme trigonométrique

$$g_N(t) = \alpha_0(f) + \sum_{k=0}^N (\alpha_k(f) \cos(kt) + \beta_k(f) \sin(kt)).$$

- Convergence de la série de Fourier dans le cas où la fonction est régulière

On suppose que la fonction périodique f de période 2π est de plus continuellement dérivable sur \mathbb{R} . Alors la série de Fourier $g_N(t)$ est une série de fonctions qui converge normalement vers la fonction f . En particulier, la suite $\alpha_0(f) + \sum_{k=0}^N (\alpha_k(f) \cos(nt) + \beta_k(f) \sin(nt))$ converge vers le nombre $f(t)$ si l'entier N tend vers l'infini.

- Théorème de Dirichlet : convergence de la série de Fourier dans un cas moins régulier

On se donne un nombre réel t_0 . On suppose que la fonction périodique f de période 2π a une limite à gauche $f(t_0^-)$ si t tend vers t_0 par valeurs inférieures et a une limite à droite $f(t_0^+)$ si t tend vers t_0 par valeurs supérieures. On suppose de plus que $\frac{1}{h}(f(t_0^-) - f(t_0^- - h))$ et $\frac{1}{h}(f(t_0^+ + h) - f(t_0^+))$ ont une limite (pas nécessairement égales) si h tend vers zéro par valeurs supérieures. Alors la série de Fourier $\alpha_0(f) + \sum_{k=0}^N (\alpha_k(f) \cos(nt) + \beta_k(f) \sin(nt))$ converge vers $\frac{1}{2}(f(t_0^-) + f(t_0^+))$ si l'entier N tend vers l'infini.