le cnam **Analyse et Calcul Matriciel**

Cours 3 Séries numériques réelles et complexes

- Quelques exemples

$1-1+1-1+\dots$

$1+\mathrm{e}^{i\alpha}+\mathrm{e}^{2i\alpha}+\dots \qquad (\alpha\in\mathbb{R})$

$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\dots$

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$ (série harmonique alternée)

$\exp(i\alpha)+\frac{1}{2}\exp(2i\alpha)+\frac{1}{3}\exp(3i\alpha)+\dots$ (une première série de Fourier)

- Théorème fondamental : la convergence absolue entraîne la convergence.

On suppose que le terme général u_n de la série est un nombre réel de signe quelconque (ou un nombre complexe). Si la série de terme général $|u_n|$ converge, alors la série de terme général u_n converge : il existe un nombre réel (ou complexe) ℓ tel que la suite S_n des sommes partielles $(S_n\equiv u_0+u_1+\dots+u_{n-1})$ converge vers ℓ si l'entier n tend vers l'infini.
Donc la série de terme général $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ si $n\geq 1$ (troisième exemple) converge.

- Structure d'espace vectoriel pour l'ensemble des séries convergentes.

Soient u_n et v_n deux séries convergentes réelles (ou complexes). Alors la série somme $(w_n=u_n+v_n)$ est également convergente. Si on multiple u_n par le nombre réel (ou complexe) fixé λ, alors la série de terme général $z_n=\lambda\,u_n$ est également convergente.
Conséquence : si u_n est une série convergente et v_n une série divergente, alors la somme $w_n=u_n+v_n$ est le terme général d'une série divergente.

- Série semi-convergente

Une série semi-convergente est une série convergente (la suite S_n des sommes partielles converge dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) si n tend vers l'infini) telle que la série $|u_n|$ des valeurs absolues diverge.

- Série réelle alternée

On suppose que le terme général u_n de la série peut s'écrire sous la forme $u_n=(-1)^n a_n$, où a_n est une suite réelle positive, décroissante et tendant vers zéro si l'entier n tend vers l'infini : $0\leq a_{n+1}\leq a_n$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Alors la série de terme général u_n converge.
Donc la série harmonique alternée du quatrième exemple $(u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ si $n\geq 1)$ converge.

- Une série dont la somme reste bornée

Le second exemple où la somme partielle peut sécrire $S_n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{ik\alpha}$ diverge. Toutefois la somme S_n reste bornée si α est réel tel que $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\neq 0$ et on a $|S_n|\leq\frac{1}{|\sin(\frac{\alpha}{2})|}$.

- Transformation d'Abel (séries alternées généralisées)

On suppose que le teme général u_n de la série peut s'écrire sous la forme $u_n=a_n\,b_n$, avec les trois hypothèses suivantes : *(i)* les sommes $B_n\equiv b_0+b_1+\dots+b_{n-1}$ restent bornées pour tout n, *(ii)* la suite a_n est positive, décroissante et tend vers zéro si n tend vers l'infini. Alors la série de teme général u_n converge. Donc la série de terme général $\frac{1}{n}\mathrm{e}^{in\alpha}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ proposée au quatrième exemple converge.

François Dubois et Chloé Mimeau, 12 octobre 2016.