

## Chapitre 1

# Introduction générale

Ce chapitre est consacré à une présentation rapide des méthodes numériques qui sont étudiées en détail dans ce cours. Nous y donnons une approche très simplifiée des quatre parties qui sont abordées :

- la résolution des systèmes linéaires,
- le calcul des valeurs propres des matrices,
- l'optimisation,
- le contrôle des systèmes linéaires.

### 1.1. La résolution des systèmes linéaires

Désignons par  $A$  une matrice carrée  $N \times N$  à coefficients réels et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^N$ . On s'intéresse à l'équation vectorielle suivante :

$$\text{trouver } X \in \mathbb{R}^N \text{ tel que : } AX = b. \quad (1.1)$$

L'algèbre matricielle nous apprend que (1.1) admet une solution unique dès que le déterminant (noté  $\det A$ ) de la matrice  $A$  est non nul.

Une première stratégie consiste à utiliser la méthode des cofacteurs. Mais le nombre d'opérations nécessaires est tellement élevé dès que l'on dépasse la dimension  $N = 3$ , qu'il faut très vite oublier cette méthode. En effet, pour calculer un déterminant d'une matrice  $N \times N$  il faut  $N.N!$  multiplications !

Une seconde approche conduit aux méthodes directes. Pour cela on décompose (c'est la factorisation) la matrice  $A$  en la composée de deux matrices notées respectivement

$L$  (*Lower*) et  $U$  (*Upper*) de telle sorte que  $A = LU$  et que  $L$  soit une matrice triangulaire inférieure régulière et  $U$  une matrice triangulaire supérieure qui est également régulière. Le système (1.1) est alors équivalent au suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } Y \in \mathbb{R}^N, \text{ solution de : } LY = b, \\ \text{puis résoudre } X \in \mathbb{R}^N \quad UX = Y. \end{cases} \quad (1.2)$$

Le secret de la méthode est qu'un système linéaire associé à une matrice triangulaire est facile à résoudre. Pour cela, on procède par substitutions successives en partant de la première ou de la dernière équation suivant qu'il s'agisse d'une matrice triangulaire inférieure ou supérieure. Toutes les méthodes qui découleront de cette stratégie s'appellent les méthodes de Gauss et leurs variantes (Crout, Cholesky ...).

Une autre approche de la résolution des systèmes linéaires consiste à construire une suite d'approximation qui converge vers la solution. Pour en donner une idée simple mais réaliste, considérons un cas élémentaire, celui de la règle de trois. Il s'agit de :

$$\text{trouver } x \in \mathbb{R}, \text{ tel que } ax = b \text{ où } a \neq 0 \text{ et } b \text{ sont deux réels donnés.} \quad (1.3)$$

Bien entendu, la solution est  $x = b/a$ . Mais intéressons-nous à la construction d'une suite  $x_n$  qui converge vers cette solution. Pour cela nous observons tout d'abord que la solution  $x$  vérifie :

$$\forall \rho \in \mathbb{R}, x = x - \rho(ax - b). \quad (1.4)$$

L'idée est par exemple de proposer un algorithme de point fixe en construisant la suite  $x^n$  de la façon suivante :

$$x^{n+1} = x^n - \rho(ax^n - b), \quad x^0 \text{ étant donné.} \quad (1.5)$$

Montrons que si  $\rho$  est astucieusement choisi, la suite  $x^n$  converge géométriquement vers  $x$ . Introduisons les variables d'écart  $\bar{x}^n = x^n - x$ . Elles vérifient :

$$\bar{x}^{n+1} = (1 - \rho a)\bar{x}^n. \quad (1.6)$$

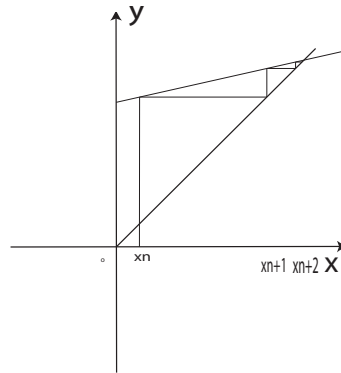
Soit :

$$|\bar{x}^{n+1}| \leq |1 - \rho a| |\bar{x}^n| \leq |1 - \rho a|^{n+1} |\bar{x}^0|. \quad (1.7)$$

Par conséquent, nous sommes assurés de la convergence dès que  $\rho$  vérifie la double inégalité qui assure que le coefficient  $1 - \rho a$  soit en module strictement inférieur à l'unité :

$$0 < a\rho < 2. \quad (1.8)$$

Par ailleurs, on notera que l'erreur est d'autant plus petite à même nombre d'itérations que l'on part proche de la solution ( $|\bar{x}^0|$  petit). En outre, l'erreur diminue à chaque itération. On parle alors de méthodes auto-correctives.



**Figure 1.1.** Schéma de l'algorithme itératif pour systèmes linéaires

La figure 1.1 illustre la méthode que nous venons de décrire et qui contient les idées fondamentales d'un grand nombre de méthodes itératives pour résoudre les systèmes linéaires. Si nous revenons au cas de l'équation (1.1), l'analogue de l'algorithme que nous venons de décrire est :

$$X^n \in \mathbb{R}^N, \quad X^{n+1} = X^n - \rho(AX^n - b), \quad X^0 \text{ donné dans } \mathbb{R}^N. \quad (1.9)$$

Il s'agit en fait d'une méthode de gradient lorsque  $A$  est une matrice symétrique. Elle permet de rechercher le minimum de la fonction  $((\cdot, \cdot)_N$  est le produit scalaire euclidien dans  $\mathbb{R}^N$  et  $\|\cdot\|_N$  est la norme associée) :

$$X \in \mathbb{R}^N \rightarrow \frac{1}{2}(AX, X)_N - (b, X)_N,$$

dans  $\mathbb{R}^N$  lorsque  $A$  est aussi définie positive (c'est-à-dire que toutes ses valeurs propres sont strictement positives).

## 1.2. Le calcul des valeurs propres des matrices

Prenons l'exemple de la figure 1.2. Il s'agit d'un enfant jouant avec un *POGO stick*. La flexibilité de ce dernier est modélisée par un ressort de raideur  $k_2$  et sa masse est  $M$ . L'enfant a une masse  $m$  et la flexibilité de ses jambes est représentée par un ressort de raideur  $k_1$ . Notons  $x_1$  (respectivement  $x_2$ ), le déplacement de l'enfant (respectivement celui du *POGO stick*). Les équations du mouvement données par la

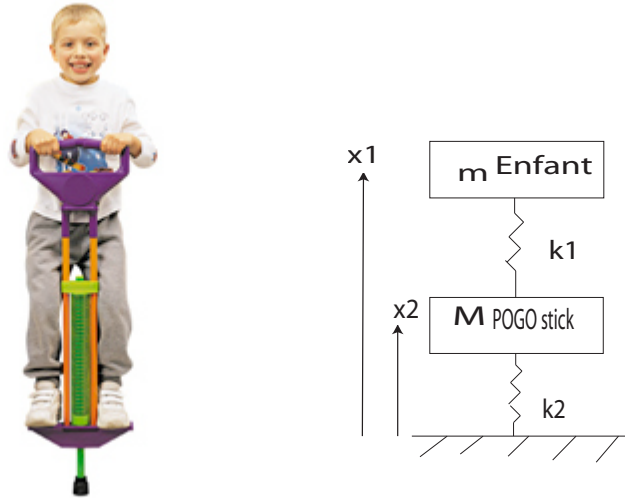


Figure 1.2. Enfant + POGO stick

mécanique sont les suivantes :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - x_2), \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_1(x_2 - x_1) - k_2 x_2. \end{cases} \quad (1.10)$$

On peut écrire ce système différentiel sous forme matricielle en posant :

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \ddot{X} + \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{pmatrix} X = 0, \quad (1.11)$$

avec la notation :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \ddot{X} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

On recherche alors des solutions harmoniques (dites stationnaires) de cette équation différentielle matricielle en posant *a priori* :

$$X = \hat{X} e^{i\mu t}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \hat{X} \neq 0.$$

Les solutions éventuelles seront des fonctions *sinus* et *cosinus* du temps à la pulsation  $\mu$ . En reportant dans l'équation (1.11), on obtient un problème aux valeurs propres :

$$\text{trouver } \lambda = \mu^2 \in \mathbb{R}^+, \quad \hat{X} \in \mathbb{R}^2, \quad \hat{X} \neq 0 \text{ tels que : } \lambda M \hat{X} = K \hat{X}, \quad (1.13)$$

où :

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Ainsi  $\lambda = \mu^2$  est la valeur propre et  $\hat{X}$  le vecteur propre. Par ailleurs  $M$  est la matrice de produit scalaire. Notons que les deux matrices  $M$  et  $K$  sont symétriques et définies positives (exercice). Le problème (1.13) est équivalent au suivant :

$$\text{trouver } \lambda \in \mathbb{R}^+, \hat{X} \in \mathbb{R}^2, \hat{X} \neq 0 \text{ tels que : } \lambda \hat{X} = M^{-1}K\hat{X}. \quad (1.15)$$

Cependant la matrice  $M^{-1}K$  qui intervient, n'est plus symétrique. Cette formulation n'est donc pas recommandée, car les matrices symétriques ont des avantages considérables, ne serait-ce que par le gain en stockage qu'elles permettent. On préfère donc la formulation qui suit. Posons :

$$D^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{pmatrix} \text{ et donc : } (D^{1/2})^2 = D = M, \quad (1.16)$$

puis :

$$\hat{X} = D^{-1/2}\hat{Y}, \quad \hat{Y} = D^{1/2}\hat{X} \quad (1.17)$$

( $D^{-1/2}$  est l'inverse de  $D^{1/2}$ ), notre problème (1.13) est maintenant équivalent à :

$$\text{trouver } \lambda \in \mathbb{R}^+, \hat{Y} \in \mathbb{R}^2, \hat{Y} \neq 0 \text{ tels que : } \lambda \hat{Y} = D^{-1/2}KD^{-1/2}\hat{Y}. \quad (1.18)$$

La matrice  $A = D^{-1/2}KD^{-1/2}$  est cette fois symétrique et cela nous facilitera le travail. Nous verrons deux types d'approches pour calculer les éléments propres d'une telle matrice : les méthodes globales avec lesquelles on calcule toutes les valeurs et les vecteurs propres et les méthodes sélectives, qui permettent de choisir un nombre donné de valeurs et de vecteurs propres en fonction de la valeur propre qui nous intéresse. Donnons-en une idée sur le petit modèle que nous avons introduit ici.

### 1.2.1. La méthode globale de Jacobi

Plaçons-nous dans le plan rapporté au système d'axes orthonormés  $(o; e_1, e_2)$  et considérons une rotation d'angle  $\theta$  qui transforme les vecteurs de base  $(e_1, e_2)$  en  $(E_1, E_2)$ . Nous avons les relations :

$$\begin{cases} E_1 = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2, \\ E_2 = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2 \end{cases} \quad (1.19)$$

La matrice de changement de base qui permet d'exprimer les coordonnées :

$$X = (x_1, x_2)$$

dans la base  $(o; e_1, e_2)$  en fonction de celles notées  $Y = (y_1, y_2)$  dans la nouvelle base  $(o; E_1, E_2)$  est  $P^\theta$  avec :

$$P^\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad X = P^\theta Y \quad Y = P^{-\theta} X. \quad (1.20)$$

Le problème de la recherche des valeurs propres de la matrice symétrique  $A$  définie plus haut, est donc équivalent à :

$$\begin{aligned} &\text{trouver } \lambda \in \mathbb{R}^+, \hat{Y} \in \mathbb{R}^2, \hat{Y} \neq 0 \text{ tels que :} \\ &\lambda \hat{Y} = P^{-\theta} A P^\theta \hat{Y} = A^\theta \hat{Y}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

soit, après un simple calcul (on pose  $c = \cos(\theta)$  et  $s = \sin(\theta)$ , les coefficients de  $A$  étant notés  $a_{ij}$ ) :

$$A^\theta = \begin{pmatrix} c^2 a_{11} + 2sca_{12} + s^2 a_{22}, & cs(a_{22} - a_{11}) + (c^2 - s^2)a_{12} \\ cs(a_{22} - a_{11}) + (c^2 - s^2)a_{12}, & c^2 a_{22} + s^2 a_{11} - 2sca_{12} \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

En choisissant l'angle  $\theta$  tel que :

$$(c^2 - s^2)a_{12} = cs(a_{11} - a_{22}),$$

on rend la matrice  $A^\theta$  diagonale et les valeurs propres sont sur la diagonale de cette nouvelle matrice. Les vecteurs propres se déduisent sans difficulté. Or la relation précédente est équivalente à :

$$\tan(2\theta) = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Soit :

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}\right) + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si  $a_{11} = a_{22}$  on choisit  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

A titre d'exercice le lecteur pourra appliquer cette méthode à notre petit problème avec les données suivantes :

$$m_1 = 1 = m_2, \quad k_1 = k_2 = k.$$

Il comparera pour se rassurer avec un calcul direct des valeurs propres en annulant le déterminant de la matrice  $A - \lambda I$  qu'il explicitera.

### 1.2.2. La méthode sélective de la puissance itérée

On sait qu'une matrice symétrique est diagonalisable dans une base de vecteurs propres orthonormés. C'est l'un des résultats fondamentaux de l'algèbre matricielle que nous utiliserons souvent dans ce cours. Désignons par  $W_1$  et  $W_2$  (respectivement  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ), les deux vecteurs propres (respectivement les deux valeurs propres), de la matrice  $A$ . Considérons ensuite une suite de vecteurs construite de la façon suivante ( $(\cdot, \cdot)_N$  est le produit scalaire et  $\|\cdot\|_N$  la norme associée) :

$$X^{n+1/2} = AX^n, \quad X^{n+1} = \frac{X^{n+1/2}}{\|X^{n+1/2}\|_N}, \quad \lambda^n = (X^{n+1/2}, X^n)_N, \quad X^0 \text{ donné.}$$

Supposons que  $\lambda_1 > \lambda_2$  (elles sont toutes deux strictement positives puisque la matrice  $A$  est définie positive) et que  $(X^0, W_1)_N \neq 0$ . Posons :

$$X^0 = \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2, \quad \text{où : } \alpha_1 = (X^0, W_1)_N, \quad \alpha_2 = (X^0, W_2)_N, \quad \alpha_1 \neq 0. \quad (1.23)$$

On a alors par un simple calcul :

$$\lambda^n = \frac{(A^{2n+1}X^0, X^0)_N}{\|AX^0\|_N^2} = \frac{\lambda_1^{2n+1}\alpha_1^2 + \lambda_2^{2n+1}\alpha_2^2}{\lambda_1^{2n}\alpha_1^2 + \lambda_2^{2n}\alpha_2^2}. \quad (1.24)$$

On peut aussi écrire :

$$\lambda^n = \lambda_1 \left[ \frac{1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2n+1} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2}{1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2n} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_1. \quad (1.25)$$

La suite  $\lambda^n$  converge donc vers la plus grande valeur propre de  $A$ . De façon similaire, on établit que la suite de vecteurs  $X^n$  converge vers  $\pm W_1$  (suivant le signe du coefficient  $\alpha_1$ ). Nous verrons alors que cette méthode peut permettre de calculer les valeurs propres et les vecteurs propres associés, voisins d'une valeur donnée à l'avance. On parle alors de méthode du *shift* (décalage). On peut aussi travailler avec plusieurs vecteurs itérés : c'est l'algorithme de la puissance itérée sur un sous-espace. Bien d'autres variantes seront discutées pour cette méthode qui a, en général, la faveur des ingénieurs de bureaux d'études.

### 1.3. L'optimisation

Considérons  $N$  points distincts, classés par ordre croissant et notés  $x_i$  et autant de valeurs désignées par  $y_i$ . Désignons par  $\{p_k\}$ ,  $k = 1, P$ , un ensemble de  $P$  fonctions définies aux points  $x_i$ . On se pose le problème de lissage suivant :

$$\min_{a=\{a_k\} \in \mathbb{R}^P} J(a), \quad \text{où } J(a) = \sum_{i=1, N} \left| \sum_{k=1, P} a_k p_k(x_i) - y_i \right|^2, \quad (1.26)$$

La solution en  $a \in \mathbb{R}^P$  permet de définir une fonction :

$$p(x) = \sum_{k=1, P} a_k p_k(x),$$

qui passe au mieux (au sens des moindres carrés), par les valeurs  $y_i$  aux  $N$  points  $x_i$ . C'est le problème classique du lissage. Examinons rapidement quelques-unes de ses propriétés.

Pour cela commençons par le cas où les fonctions  $\{p_k\}$  sont les polynômes de degrés inférieurs ou égal à  $N - 1$ . La dimension de cet espace de polynômes est bien  $N$ , nous avons donc dans ce cas :  $N = P$ . On construit ensuite les  $N$  polynômes de Lagrange notés  $\Lambda_k$ ,  $k = 1, N$  valant respectivement 0 au points  $x_j$ ,  $j \in \{1, N\}$ ,  $j \neq k$  et 1 en  $x_k$ . Un calcul classique nous donne :

$$\Lambda(x) = \frac{\prod_{i=1, N, i \neq k} (x - x_i)}{\prod_{i=1, N, i \neq k} (x_k - x_i)}. \quad (1.27)$$

Considérons ensuite le polynôme :

$$p(x) = \sum_{k=1, N} y_k \Lambda_k(x). \quad (1.28)$$

Il vaut exactement  $y_i$  aux points  $x_i$  pour  $i = 1, N$ . Choisissons alors pour  $a_k$  les coefficients des monômes  $x^k$  dans l'expression de  $p$ . La fonctionnelle  $J(a)$  s'annule. Comme elle est positive, on a trouvé un minimum. C'est bien le seul possible dans l'ensemble de recherche. En effet, supposons qu'il en existe un autre - soit  $b \in \mathbb{R}^N$  - et notons  $q(x) = \sum_{k=1, N} b_k x^k$  le polynôme associé. On aurait :

$$r(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = 0 \quad \forall i = 1, N.$$

Par conséquent, le polynôme  $r$  qui est de degré  $N - 1$  s'annule en  $N$  points distincts. En d'autres termes il admet en facteur un polynôme de degré  $N$  et donc est nul ! Ceci prouve l'unicité.

Plaçons-nous maintenant dans un cas moins évident. Supposons que  $P < N$  et considérons un ensemble de  $P$  fonctions définies aux points  $x_i$ . Nous faisons une hypothèse de qualification sur les  $P$  vecteurs  $X_k = \{p_k(x_i)\} \in \mathbb{R}^N$ ,  $i = 1, N$ . Nous supposons qu'ils sont linéairement indépendants. Si  $a \in \mathbb{R}^P$  réalise le minimum de la fonction  $J$ . Nous avons par exemple :

$$\forall k \in \{1, P\}, \forall b_k \in \mathbb{R}, b = (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, b_k, a_{k+1}, \dots, a_P), \quad (1.29)$$

$$J(a) \leq J(b).$$

En explicitant, l'expression de  $J(b)$  en fonction de  $b_k$  nous obtenons un polynôme du second degré de la forme :

$$J(b) = A_k b_k^2 + 2B_k b_k + C_k,$$



dont le minimum est atteint en  $a_k$  de telle sorte que :

$$A_k a_k + B_k = 0.$$

Explicitons les coefficients  $A_k$  et  $B_k$ . Nous obtenons ainsi :

$$A_k = \sum_{i=1,N} p_k(x_i)^2, \quad B_k = \sum_{j=1,N, j \neq k} \sum_{i=1,N} a_j p_k(x_i) p_j(x_i) - \sum_{i=1,N} y_i p_k(x_i).$$

Le vecteur  $a$  est donc solution du système matriciel suivant :

$$Qa = d$$

avec :

$$Q = \begin{pmatrix} \sum_{i=1,N} p_1(x_i)^2 & \sum_{i=1,N} p_1(x_i) p_2(x_i) & \dots \\ \sum_{i=1,N} p_1(x_i) p_2(x_i) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

$$d = \begin{pmatrix} \sum_{i=1,N} y_i p_1(x_i) \\ \sum_{i=1,N} y_i p_2(x_i) \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{i=1,N} y_i p_k(x_i) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

La matrice  $Q = (q_{kl})$  est manifestement symétrique. En fait, nous allons voir que grâce à l'hypothèse de qualification énoncée précédemment elle est aussi définie positive. Ceci nous permettra aussi d'assurer qu'elle est inversible. Désignons par  $q_{kl}$  les coefficients de la matrice  $Q$ . Notons  $Z = \{z_k\}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^P$ . Considérons ensuite l'expression (forme quadratique associée à  $Q$ ) :

$$(QZ, Z) = \sum_{k,l=1,P} z_k z_l q_{kl} = \sum_{k,l=1,P} \sum_{i=1,N} z_k z_l p_k(x_i) p_l(x_i),$$

qui est aussi égale à :

$$\sum_{i=1,N} \left[ \sum_{k=1,P} z_k p_k(x_i) \right]^2 \geq 0.$$

Par conséquent  $Q$  est positive. Par ailleurs si :

$$\sum_{k=1,P} z_k p_k(x_i) = 0,$$

alors l'hypothèse de qualification (indépendance linéaire des vecteurs  $p_k(x_i)$ ), nous permet d'assurer que :

$$\forall k = 1, N, z_k = 0$$

et par conséquent la matrice  $Q$  est bien définie positive. Toutes ses valeurs propres sont strictement positives et donc elle est inversible. Ainsi le problème de lissage que nous avons envisagé est bien posé et se ramène à la résolution d'un système linéaire qui de plus est associé à une matrice symétrique définie positive.

**Remarque 1.3.1** *Le choix de la fonctionnelle à minimiser que nous avons retenue dans cet exemple est arbitraire et relève de l'intuition de l'ingénieur. Néanmoins, les critères quadratiques présentent l'immense avantage de conduire à des systèmes linéaires. Cela justifie leur importance dans les problèmes d'optimisation.*

**Remarque 1.3.2** *Dans ce second exemple rien ne garantit que les valeurs de la fonction lissée :  $p = \sum_{k=1, P} a_k p_k$  prennent les valeurs  $y_i$  aux points  $x_i$ . Mais on peut décider par exemple d'un intervalle autorisé autour de ces valeurs. Par exemple de la forme suivante :*

$$\forall i \in \{1, N\}, y_i - \varepsilon_i \leq p(x_i) \leq y_i + \varepsilon_i, \quad (1.32)$$

où  $\varepsilon_i$  sont des tolérances fixées par des considérations liées au problème à résoudre. On obtient alors un nouveau problème d'optimisation avec des contraintes. Nous verrons comment procéder pour résoudre ce type de problèmes dits sous contraintes dans la partie consacrée à l'optimisation.

#### 1.4. Le contrôle des systèmes linéaires

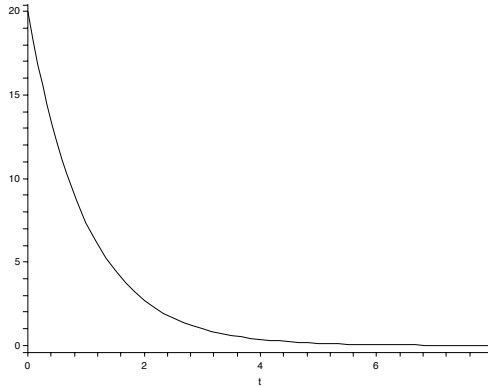
Considérons l'équation différentielle suivante qui par exemple modélise l'évolution de la température  $T$  (mesurée par rapport à la température extérieure) en un point donné d'une pièce et  $c$  représente la quantité de chaleur apportée par le chauffage. Le coefficient  $k$  représente les fuites thermiques dues à une mauvaise isolation et  $T_0$  est la température initiale.

$$\dot{T}(t) + kT(t) = c(t), \quad \forall t > 0, T(0) = T_0. \quad (1.33)$$

Si on ne fait rien, c'est-à-dire  $c \equiv 0$ , la température évolue comme indiqué sur la figure 1.3. La solution analytique est :

$$T(t) = T_0 e^{-kt}. \quad (1.34)$$

Imaginons maintenant qu'à l'instant  $t_1$ , la température atteigne la valeur  $T_1 < T_0$  (ce



**Figure 1.3.** Evolution de la température sans chauffage en fonction du temps

qui donne  $t_1 = -\frac{\text{Log}(T_1/T_0)}{k}$  et qu'un thermostat mette le chauffage en route. On suppose l'apport de chaleur constant :

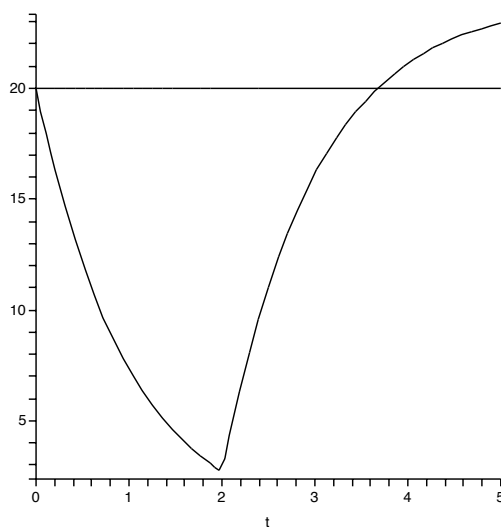
$$c(t) = c_0.$$

La solution de l'équation (1.33) est :

$$T(t) = T_1 e^{-k(t-t_1)} + \frac{c_0}{k} [1 - e^{-k(t-t_1)}]. \quad (1.35)$$

Elle est représentée sur la figure 1.4.

Dans un processus de régulation automatique, le thermostat arrêtera automatiquement le chauffage dès que la température sera repassée au-dessus de  $T_0$  (valeur  $20^0$  sur la figure 1.4 correspondant à un temps  $t_2 \simeq 3.7 \text{ heures}$ ). Mais bien entendu, le temps de marche du chauffage dépend de la puissance de chauffe  $c_0$  et du coefficient de perte  $k$ . Par exemple si  $c_0 \leq kT_1$  il sera impossible de réchauffer la pièce. C'est ainsi que pour une chaudière donnée (puissance fixée par le constructeur), le seuil de déclenchement devra être tel que  $T_1 > \frac{c_0}{k}$ . Sinon le coefficient de l'exponentielle est négatif et la température demeure décroissante (voir figure 1.5). Par ailleurs, pour que l'asymptote soit au-dessus de la température de  $20^0$ , de façon à revenir en un temps fini à la température de départ, il faut que :  $\frac{c_0}{k} > 20^0$ . La figure 1.6 montre le comportement de la température dans le cas où cette condition supplémentaire ne serait pas vérifiée. On se pose alors le problème suivant : *comment choisir  $T_1$  de façon à minimiser le coût du chauffage qui est de la forme  $(t_2 - t_1)c_0$  ?*

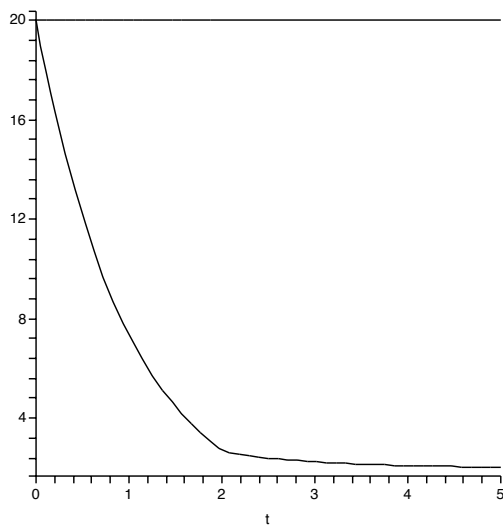


**Figure 1.4.** Evolution de la température en fonction du temps avec un chauffage qui démarre à l'instant  $t=2$  heures

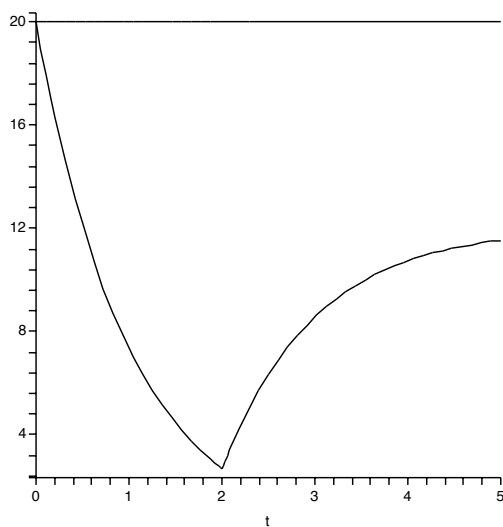
En fait la réponse à cette question devra également prendre en compte qu'un trop grand nombre de commutations risque d'user prématurément la chaudière. Par ailleurs, le nombre de points d'observation de la température n'est pas nécessairement unique (cas de plusieurs thermostats). Il existe par exemple de nombreuses pièces dans lesquelles on souhaite surveiller et réguler cette dernière (immeuble). On aboutit alors à un système différentiel et le problème généralisé fait largement appel à l'analyse numérique matricielle. Voilà très sommairement le type de problèmes que nous discuterons dans cette deuxième partie.

### 1.5. Les aspects aléatoires

La plupart des coefficients qui interviennent dans les systèmes linéaires, dans un calcul de valeurs propres ou encore dans un problème d'optimisation, sont issus de mesures et par conséquent, entachés d'erreurs. En faisant des hypothèses statistiques sur les lois de répartition de ces erreurs, on peut en déduire certains renseignements sur les lois de répartition des solutions recherchées. Bien que traitée de façon très incomplète, cette problématique est abordée et discutée dans la troisième partie.



**Figure 1.5.** Cas d'une puissance de chauffage nettement insuffisante



**Figure 1.6.** Réchauffement insuffisant pour revenir à la température initiale

