Corrigé du devoir 2

Exercice 1

1°) Nous allons utiliser des factorisations adéquates:

$$\frac{1}{(n-1)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^\alpha}\right); \qquad \frac{1}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}\right)$$

Donc: $u_n = \frac{1}{n^\alpha}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^\alpha} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha} - 2\right] = n^{-\alpha}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} - 2\right]$

Nous allons faire des développements limités à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right); \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'où: $u_n = n^{-\alpha}\left[1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2n^2} + 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2n^2} - 2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = n^{-\alpha}\left[\frac{\alpha(\alpha+1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)}{n^{\alpha+2}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right)$$

Donc, à partir d'un certain rang, pour n suffisamment grand, on a: $u_n = \frac{\alpha(\alpha+1)}{n^{\alpha+2}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right)$.

Là nous voyons que $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ annulent le premier facteur du deuxième membre de l'égalité précédente.

Donc il faudra bien examiner ces cas de figure:

* si $\underline{\alpha = 0}$, $u_n = 0$, la série converge, sa somme est nulle.

** si $\underline{\alpha = -1}$, $u_n = (n-1) + (n+1) - 2n = 0$, la série converge, sa somme est nulle.

*** si $\underline{\alpha \notin \{-1; 0\}}$, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha(\alpha+1)}{n^{\alpha+2}}$, premier terme non nul du développement limité.

Nous allons utiliser le critère des équivalents avec celui de la convergence des séries de Riemann: $\frac{1}{n^a}$ terme général d'une série Riemann convergente si et seulement si $a > 1$, divergente si et seulement si $a \leqslant 1$, *ie* ici:

- Convergente si et seulement si $\alpha + 2 > 1$, $\alpha > -1$,
- Divergente si et seulement si $\alpha \leqslant -1$.

Donc: la série numérique initiale sera convergente si et seulement si $\alpha > -1$

2°) Calculons $S_N = \sum_{k=2}^{N} u_k = u_2 + u_3 + \cdots + u_{N-1} + u_N =$

$$
\begin{array}{rl}
 & \frac{1}{1^\alpha} + \cancel{\frac{1}{3^\alpha}} - \frac{2}{2^\alpha} \\
+ & \frac{1}{2^\alpha} + \cancel{\frac{1}{4^\alpha}} - \cancel{\frac{2}{3^\alpha}} \\
+ & \cancel{\frac{1}{3^\alpha}} + \cancel{\frac{1}{5^\alpha}} - \cancel{\frac{2}{4^\alpha}} \\
+ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ & \cancel{\frac{1}{(N-3)^\alpha}} + \cancel{\frac{1}{(N-1)^\alpha}} - \cancel{\frac{2}{(N-2)^\alpha}} \\
+ & \cancel{\frac{1}{(N-2)^\alpha}} + \frac{1}{(N)^\alpha} - \cancel{\frac{2}{(N-1)^\alpha}} \\
+ & \cancel{\frac{1}{(N-1)^\alpha}} + \frac{1}{(N+1)^\alpha} - \frac{2}{(N)^\alpha} \\
\hline
= & \frac{1}{1^\alpha} - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{(N+1)^\alpha} - \frac{1}{N^\alpha}
\end{array}
$$

ie: $S_N = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{(N+1)^\alpha} - \frac{1}{N^\alpha} = +1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{(N)^\alpha}\left[\frac{1}{(1+\frac{1}{N})^\alpha} - 1\right]$

Nous allons faire un développement limité:

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{N})^\alpha} = \left(1+\frac{1}{N}\right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right) \Rightarrow S_N = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + N^{-\alpha}\left(1 - \frac{\alpha}{N} - 1 + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)$$

$$S_N = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{N^\alpha}\left(-\frac{\alpha}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2^\alpha} - \frac{\alpha}{N^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{N^{\alpha+1}}\right)$$

Or $\alpha > -1 \Rightarrow N^{\alpha+1} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

donc $o\left(\frac{1}{N^{\alpha+1}}\right) \to 0 \Rightarrow S_N \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} S = 1 - \frac{1}{2^\alpha} = \sum_{n \geqslant 2} u_n$

Exercice 2

1°) Nous allons montrer que l'on peut utiliser le critère des équivalents. La série numérique est à termes positifs car $1 + \frac{2}{n(n+3)} > 1 \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) > 0$ (ln monotone strictement croissante).

Dès lors, en utilisant $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ où $x = \frac{2}{n(n+3)} \quad (n \to +\infty)$,

on a: $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n(n+3)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2} = v_n$

Or v_n est le terme général d'une série numérique Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$).

Donc la série numérique de terme général u_n converge.

2°) $u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) = \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n(n+3)}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right) = \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln n - \ln(n+3)$

Dès lors, on a: $S_N = \sum_{k=1}^{N} u_k =$

$$
\begin{array}{rl}
 & \cancel{\ln 2} + \ln 3 - \ln 1 - \cancel{\ln 4} \\
+ & \cancel{\ln 3} + \cancel{\ln 4} - \cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 5} \\
+ & \cancel{\ln 4} + \cancel{\ln 5} - \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 6} \\
+ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ & \cancel{\ln(N-1)} + \cancel{\ln N} - \cancel{\ln(N-2)} - \cancel{\ln(N+1)} \\
+ & \cancel{\ln(N)} + \cancel{\ln(N+1)} - \cancel{\ln(N-1)} - \cancel{\ln(N+2)} \\
+ & \ln(N+1) + \cancel{\ln(N+2)} - \cancel{\ln(N)} - \ln(N+3)
\end{array}
$$

$$S_N = \ln 3 - \ln 1 + \ln(N+1) - \ln(N+3) = \ln 3 + \ln\left(\frac{N+1}{N+3}\right) = \ln\left(3\left(\frac{N+1}{N+3}\right)\right)$$

Comme nous avons prouvé la convergence de la série, nous pouvons affirmer que $\sum_{n \geqslant 1} u_n = \lim_{N \to +\infty} (S_N) = \ln 3$

car $\frac{N+1}{N+3} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

****