CNAM Paris **2012-2013**

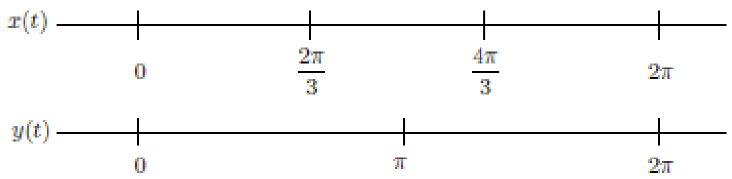
IMATH- MVA006

Devoir n°4
Eléments de corrigé

Exercice 1

1°) $D_x = D_y = D = \mathbb{R}$, car rapports sans dénominateurs nuls.
$x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$; donc:$D' = \mathbb{R}^+$ + symétrie par rapport à $0y$.

2°) $D_x = D_y = D = \mathbb{R}$
$x(t)$ a pour période $P_x = \dfrac{2\pi}{3}$ et $y(t)$ a pour période π



Donc $x(t+2\pi) = x(t)$ et $y(t+2\pi) = y(t)$, d'où $D' = [0, 2\pi]$
D'autre part, $x(t+\pi) = -x(t)$ et $y(t+\pi) = y(t)$ d'où $D'' = [0, \pi]$ + symétrie par rapport à $0y$.
De plus, $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, d'où $D''' = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ + symétrie par rapport à 0y, puis par rapport à $0x$.
Enfin $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$, d'où une symétrie par rapport à 0, qui, en fait, résulte de la décomposition des 2 premières. D'où, finalement, on a:
$\mathscr{C}$ = domaine d'étude final = $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ + symétrie par rapport à $0y$, puis par rapport à $0x$

3°) $D_x = \mathbb{R}^*,\ D_y = \mathbb{R}^*_+ \Rightarrow D = D_x \cap D_y = \mathbb{R}^*_+$

$$x\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t^2} - 1}{\frac{1}{t}} = \frac{1}{t} - t = \frac{1-t^2}{t} = -x(t)$$

$y\left(\dfrac{1}{t}\right) = (\ln \dfrac{1}{t})^3 = -(\ln t)^3 = -y(t)$ d'où: $D' =]0, 1]$ + symétrie par rapport à 0.

Exercice 2

1°) <u>Domaine de définition</u>
$D_x = D_y = D = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

2°) <u>Réductions</u>
$x(t)$ et $y(t)$ sont 2π-périodiques $\Rightarrow$ $D' = [-\pi, +\pi] \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right\}$ et la courbe se répète sur elle-même.
Par ailleurs, $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, d'où on a $D'' = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ + symétrie par rapport à $0y$.

3°) Dérivées

$x'(t) = \dfrac{1}{\cos^2 t} + \cos t = \dfrac{1+\cos^3 t}{\cos^2 t} \geqslant 0,$
$\forall t$ tel que $\cos t \neq 0$, en fait $\forall t \in D''$

$y'(t) = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t} \geqslant 0,\ \forall t \in D''$

$m(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{\sin t}{1+\cos^3 t}$

Tableau de variation (sur D'')

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$x'(t)$	$+$	‖	$+$
$x(t)$	$0 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 0$
$y'(t)$	$+$	‖	$+$
$y(t)$	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow -1$
$m(t)$	0	1	∞

4°) Branche infinies:

La courbe possède sur D'' 2 branches infinies, pour $t \to \frac{\pi}{2}^-$ et pour $t \to \frac{\pi}{2}^+$, valeurs pour lesquelles les 2 coordonnées tendent vers l'infini.

$\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{1}{\sin t(1+\cos t)} \underset{t\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 1$; $y(t) - x(t) = \dfrac{1-\sin t}{\cos t} - \sin t \underset{t\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} -1$

Donc on a une asymptote oblique $y = x - 1$ pour $t \to \dfrac{\pi}{2}$

On étudie le signe de $y(t) - x(t) + 1 = \dfrac{1}{\cos t} - \dfrac{\sin t}{\cos t} - \sin t + 1 = \dfrac{1-\sin t}{\cos t} - \sin t + 1.$

On pose $u = \dfrac{\pi}{2} - t \Rightarrow \dfrac{1-\sin t}{\cos t} - \sin t + 1 = \dfrac{1-\cos u}{\sin u} - \cos u + 1$ et ceci $\underset{0}{\sim} \dfrac{u}{2}$ (développement limité)

D'où, si $t \to \dfrac{\pi}{2}^-$, $u \to 0^+ \Rightarrow$ courbe au-dessus de son asymptote;

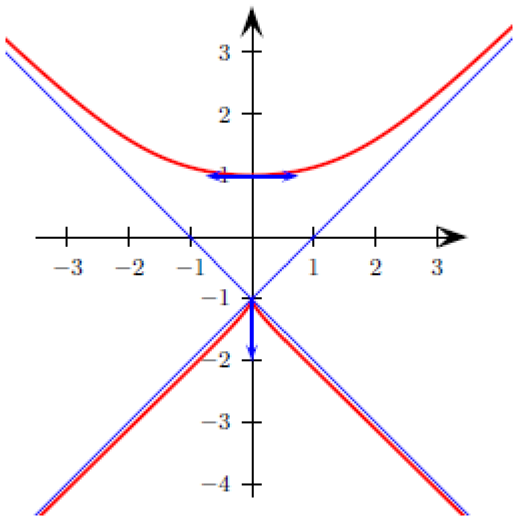
si $t \to \dfrac{\pi}{2}^+$, $u \to 0^- \Rightarrow$ courbe en-dessous.

5°) $m'(t) = \left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)' = \dfrac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^2}$ et le numérateur s'annule sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ et $\left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$

Il y a donc 2 points d'inflexion: $t_1 \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ et $t_2 \in \left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$

On voit également qu'il y a un point singilier en π, qui est un point de rebroussement de $1^{\text{ère}}$ espèce car $y''(\pi) \neq 0$ et $x'''(\pi)y''(\pi) - y'''(\pi)x''(\pi) \neq 0$

6°)



******