MVA101 - Correction du devoir 3

Exercice 1 : Calcul de transformée

Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-a|x|}$.

1. On considère une fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est intégrable et paire. Montrer que :

$$\widehat{g}(\omega) = 2\int_0^{+\infty} g(x)\cos(\omega x)\ dx.$$

Correction :

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-i\omega x}\ dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)(\cos(\omega x) - i\sin(\omega x))\ dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cos(\omega x)\ dx - i\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\sin(\omega x)\ dx}
\end{aligned}$$

La deuxième intégrale (en sinus) est nulle car g est paire et la fonction sinus est impaire. Donc :

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cos(\omega x)\ dx = 2\int_0^{+\infty} g(x)\cos(\omega x)\ dx$$

(car g et cos sont paires)

2. Se servir de la question précédente pour calculer la transformée de Fourier de f.
Correction :

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\ dx \\
&= 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\ dx \qquad \text{(car } f \text{ est paire)} \\
&= 2\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(\omega x)\ dx \\
&\underbrace{=}_{IPP} 2\left(\cancel{\left[\frac{\sin(\omega x)e^{-ax}}{\omega}\right]_0^{+\infty}} + \frac{a}{\omega}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(\omega x)\ dx\right) \\
&\underbrace{=}_{IPP\ 2} \frac{2a}{\omega}\left(\left[\frac{-\cos(\omega x)e^{-ax}}{\omega}\right]_0^{+\infty} - \frac{a}{\omega}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(\omega x)\ dx\right) \\
&= \frac{2a}{\omega}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{a}{\omega}\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(\omega x)\ dx}_{I}\right) \\
&= \frac{2a}{\omega^2} - \frac{2a^2}{\omega^2}I
\end{aligned}$$

Or d'après la troisième ligne du calcul on sait que $\hat{f}(\omega) = 2\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(\omega x)\ dx = 2\ I$. Donc :

$$\begin{aligned} 2\ I &= \frac{2a}{\omega^2} - \frac{2a^2}{\omega^2} I \\ \Longleftrightarrow I\left(2+\frac{2a^2}{\omega^2}\right) &= \frac{2a}{\omega^2} \\ \Longleftrightarrow I\left(1+\frac{a^2}{\omega^2}\right) &= \frac{a}{\omega^2} \\ \Longleftrightarrow I &= \frac{a}{\omega^2+a^2} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\hat{f}(\omega) = 2\ I = \frac{2a}{\omega^2+a^2}}$

3. Avec une valeur de a particulière, en déduire la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+\omega^2}\ d\omega$.
   <u>*Correction*</u> :
   On prend $a=1$. Dans ce cas on a : $\dfrac{2a}{\omega^2+a^2} = \dfrac{2}{\omega^2+1} = 2\times\dfrac{1}{\omega^2+1}$.
   Donc, par transformation de Fourier inverse on a :

$$\begin{aligned} &\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f})(x) = \overline{\mathcal{F}}\left(2\times\frac{1}{\omega^2+1}\right)(x) \\ \Longleftrightarrow\ & 2\pi f(x)_{a=1} = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega^2+1}e^{i\omega x}\ d\omega = 4\int_0^{+\infty}\frac{1}{\omega^2+1}\cos(\omega x)\ d\omega \\ \Longleftrightarrow\ & 2\pi e^{-|x|} = 4\int_0^{+\infty}\frac{1}{\omega^2+1}\cos(\omega x)\ d\omega \\ \Longleftrightarrow\ & \boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\omega x)}{\omega^2+1}\ d\omega = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}} \end{aligned}$$

Exercice 2 : Équations différentielles

Partie A :

Soit $a>0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-ax^2}$.

1. Montrer que f est solution de l'équation différentielle : $y'(x) + 2axy(x) = 0$.
   <u>*Correction*</u> :
   On remplace $y(x)$ et $y'(x)$ respectivement par $f(x)$ et $f'(x)$ dans l'équation différentielle et on a :

$$-2axe^{-ax^2} + 2ax(e^{-ax^2}) = 0 \qquad \text{(OK)}$$

2. En appliquant la transformation de Fourier à cette équation différentielle, en déduire une équation différentielle vérifiée par $\widehat{f}$.
   <u>*Correction*</u> :

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(f'(x))(\omega) + \mathcal{F}(2axf(x))(\omega) = \mathcal{F}(0)(\omega) \\ &\widehat{(f')}(\omega) + 2a\mathcal{F}(xf(x))(\omega) = 0 \end{aligned}$$

   Or, d'après le cours on sait que : $\mathcal{F}(xf(x))(\omega) = -\dfrac{1}{i}\dfrac{d}{d\omega}\widehat{f}(\omega) = i\ (\widehat{f})'(\omega)$.
   Et on sait aussi que : $\widehat{(f')}(\omega) = i\omega\widehat{f}(\omega)$.
   Donc, en reprenant le calcul on a :

$$\begin{aligned} & i\omega\widehat{f}(\omega) + 2ai\ (\widehat{f})'(\omega) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \boxed{2a(\widehat{f})'(\omega) + \omega\widehat{f}(\omega) = 0} \qquad \text{(EDO du 1er ordre vérifiée par } \widehat{f}(\omega)\text{)} \end{aligned}$$

3. Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, calculer $\widehat{f}(0)$.
   Correction :

$$\widehat{f}(0) \underbrace{=}_{\omega=0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\times 0}\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\times 1\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\ dx$$

   Donc $\boxed{\widehat{f}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}}$

4. Montrer que la fonction : $\omega \mapsto \widehat{f}(0)\exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)$ est solution de l'équation différentielle trouvée à la question 2). En déduire la valeur de $\widehat{f}(\omega)$.
   Correction :
   D'après la question 2) on a : $2a(\widehat{f})'(\omega) + \omega\widehat{f}(\omega) = 0$.
   Donc soit $\widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(0)\exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)$, alors $(\widehat{f})'(\omega) = -\frac{2\omega}{4a}\widehat{f}(0)\exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right) = -\frac{\omega}{2a}\widehat{f}(\omega)$.
   Ainsi : $2a(\widehat{f})'(\omega) + \omega\widehat{f}(\omega) = -\frac{2a\omega}{2a}\widehat{f}(\omega) + \omega\widehat{f}(\omega) = -\omega\widehat{f}(\omega) + \omega\widehat{f}(\omega) = 0$.
   Donc la fonction : $\omega \mapsto \widehat{f}(0)\exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)$ est bien solution de l'équation différentielle et on a :

$$\widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(0)\exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right) = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)}$$

Partie B : Équation de la chaleur

On considère l'équation de la chaleur en une dimension pour une fonction $u(x,t)$ où $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Cette équation modélise l'évolution de la chaleur sur un fil de longueur infinie. La quantité $u(x,t)$ représente la température du fil à l'abscisse x et au temps t.

1. On considère que pour tout temps t, la fonction $x \mapsto u(x,t)$ est intégrable. On pose $\hat{u}(\omega,t)$ sa transformée de Fourier (attention, la transformation de Fourier est faite sur la variable x, pas t). Montrer que $\hat{u}$ vérifie l'équation :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t) + \omega^2\hat{u}(\omega,t) = 0$$

   Correction :
   On applique la transformation de Fourier à l'équation de la chaleur donnée dans l'énoncé :

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)(\omega) - \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)(\omega) = \mathcal{F}(0)(\omega) \\ \iff &\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\omega,t) - (i\omega\underbrace{\widehat{(u')}(\omega,t))}_{i\omega\widehat{u}(\omega,t)} = 0 \\ \iff &\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\omega,t) + \omega^2\widehat{u}(\omega,t) = 0} \end{aligned}$$

2. En déduire que : $\hat{u}(\omega,t) = \hat{u}_0(\omega)\ e^{-\omega^2 t}$
   Correction :
   On vérifie que la solution $\hat{u}(\omega,t) = \hat{u}_0(\omega)\ e^{-\omega^2 t}$ vérifie bien l'équation trouvée précédemment.
   D'une part on a : $\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\omega,t) = -\widehat{u}_0(\omega)\omega^2 e^{-\omega^2 t}$.
   Et d'autre part on a : $\omega^2\widehat{u}(\omega,t) = \widehat{u}_0(\omega)\omega^2 e^{-\omega^2 t}$.
   Donc $\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\omega,t) + \omega^2\widehat{u}(\omega,t) = -\widehat{u}_0(\omega)\omega^2 e^{-\omega^2 t} + \widehat{u}_0(\omega)\omega^2 e^{-\omega^2 t} = 0$
   Ainsi : $\hat{u}(\omega,t) = \hat{u}_0(\omega)\ e^{-\omega^2 t}$.

3. On pose $g(\omega,t) = e^{-\omega^2 t}$. À partir de la question précédente, montrer que : $u(x,t) = \dfrac{1}{2\pi} u_0(x) \star \overline{\mathcal{F}}(g(\omega,t))(x)$

   <u>*Correction*</u> :

   D'après la question précédente on sait que $\hat{u}(\omega,t) = \hat{u}_0(\omega)\ e^{-\omega^2 t}$. Le but ici est d'appliquer la transformation de Fourier au terme $u_0(x) \star \overline{\mathcal{F}}(g(\omega,t))(x)$ et de montrer que le résultat est égal à $2\pi\hat{u}_0(\omega)\ e^{-\omega^2 t}$. Or d'après le cours on sait que : $\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$. Donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u_0(x) \star \overline{\mathcal{F}}(g(\omega,t))) &= \mathcal{F}(u_0(x))(\omega) \cdot \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}(g(\omega,t))) \\
&= \widehat{u_0}(\omega) \cdot 2\pi g(\omega,t) \\
&= 2\pi\widehat{u_0}(\omega) \cdot e{-}\omega^2 t \\
&= 2\pi\widehat{u}(\omega,t) \\
&= 2\pi\mathcal{F}(u(x,t))(\omega)
\end{aligned}$$

   Donc : $\boxed{u(x,t) = \dfrac{1}{2\pi}(u_0(x) \star \overline{\mathcal{F}}(g(\omega,t)))}$

4. En utilisant la fonction $f(x) = e^{-ax^2}$ de la partie A, pour laquelle on remplace a par t et x par ω, et en utilisant le résultat final de la partie A, on obtient dans le cas présent que si $g(\omega,t) = e^{-\omega^2 t}$, alors $\overline{\mathcal{F}}(g(\omega,t))(x) = e^{-\frac{x^2}{4t}}\sqrt{\dfrac{\pi}{t}}$. En déduire que :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}}\ u_0(x-y)\ dy$$

   <u>*Correction*</u> :

   En appliquant la définition du produit de convolution on a :

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathcal{F}}(g(\omega,t))(y) u_0(x-y)\ dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathcal{F}}(e^{-\omega^2 t})(y) u_0(x-y)\ dy
\end{aligned}$$

   Or d'après la partie A, on a montré que si $f(x) = e^{-ax^2}$, alors $\widehat{f}(\omega) = e^{\frac{-\omega^2}{4a}}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$.

   Par analogie, on a ici $a = t$ et $x = \omega$ et dans le cas présent on a que si $g(\omega,t) = e^{-\omega^2 t}$ alors $\overline{\mathcal{F}}(g(\omega,t))(x) = e^{\frac{-x^2}{4t}}\sqrt{\dfrac{\pi}{t}}$.

   Ainsi, avec ce changement de notation on a : $\overline{\mathcal{F}}(e^{\omega^2 t})(y) = e^{\frac{-y^2}{4t}}\sqrt{\dfrac{\pi}{t}}$.

   Donc $u(x,t) = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\pi}{t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-y^2}{4t}} u_0(x-y)\ dy = \boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-y^2}{4t}}\ u_0(x-y)\ dy}$