Exercice 3

1) On a : $|\sin(n)| < n$ pour $n > 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Donc : $\left|n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| < n \times \frac{1}{n} = 1$

Or $0 < \frac{1}{n} < 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $0<x<1$ on a : $0 < \sin(x) < x$

Donc, ici : $0 < n \sin\left(\frac{1}{n}\right) < 1$ (on peut enlever les valeurs absolues)

Par conséquent, puisque $n^b > n^a$, alors :

$$\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^b} < \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a}$$

Le terme général $\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^b}$ est majoré par le terme général d'une série convergente, donc cette série converge (cf théorème des comparaisons).

2) Intéressons nous à $\ln(u_n)$:

$$\ln(u_n) = \ln\left(\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a}\right) = n^a \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Il faut faire le développement limité de $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ à un ordre suffisant car on va d'abord multiplier par n puis par n^a et à la fin on veut un développement limité à un ordre strictement supérieur à 2.

Donc : $\ln(u_n) = n^a \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ (dvp limité en 0 du sin)

$$= n^a \ln\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)$$

$$= n^a \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \quad \text{(dvp limité en 0 de } \ln(1-x)\text{)}$$

$$= n^a\left(-\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right).$$

$$= -\frac{1}{6n^{2-a}} + o\left(\frac{1}{n^{3-a}}\right)$$

Comme $a \leq 2$ alors $2-a \geq 0$ et de même, $3-a \geq 0$; alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{6n^{2-a}} + o\left(\frac{1}{n^{3-a}}\right) = 0 + 0 = 0$$ (car $2-a$ et $3-a$ sont positifs)

Donc, puisque $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$.

Donc, d'après le critère grossier de convergence, la série de terme général u_n ne converge pas.

3) a) Faisons un développement limité en 0 de $\ln(u_n)$ avec $a = 2+\varepsilon$:

$$\ln(u_n) = n^{2+\varepsilon} \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= n^{2+\varepsilon} \ln\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) = n^{2+\varepsilon} \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= n^{2+\varepsilon}\left(-\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{6n^{(2-(2+\varepsilon))}} + o\left(\frac{1}{n^{3-(2+\varepsilon)}}\right)$$

$$= -\frac{1}{6n^{-\varepsilon}} + o\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right) = -\frac{n^\varepsilon}{6} + o\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)$$

Donc $u_n = \exp\left(-\frac{n^\varepsilon}{6} + o\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)\right) = \exp\left(-\frac{n^\varepsilon}{6}\right) \cdot \exp\left(o\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)\right)$

Et comme $1-\varepsilon > 0$, alors $\frac{1}{n^{1-\varepsilon}} \to 0$ quand n tend vers $+\infty$

et donc $\exp\left(o\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(0) = 1$.

Par conséquent : $u_n \sim \exp\left(-\frac{n^\varepsilon}{6}\right)$

3)b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n \sim \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \exp\left(-\frac{n^\varepsilon}{6}\right)$

On sait que $0 < \varepsilon < 1$ donc n^ε peut s'exprimer comme $n^{1/R}$ avec R un réel >1 et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1/R} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(-\frac{n^\varepsilon}{6}\right) = 0$. Et d'après le théorème des puissances comparées, on a par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{n^2}_{+\infty} \underbrace{\exp\left(-\frac{n^\varepsilon}{6}\right)}_{0} = 0$$

c) Par conséquent, d'après le thm énoncé par la règle de Riemann, puisque $n^2 \exp\left(-\frac{n^\varepsilon}{6}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et que $\alpha = 2 > 1$, alors

la série de terme général $\exp\left(-\frac{n^\varepsilon}{6}\right)$ converge, et puisque on a $u_n \sim \exp\left(-\frac{n^\varepsilon}{6}\right)$, alors la série de terme général u_n converge.

4) • On sait que si $a = 2+\varepsilon$, c.a.d si $2 < a < 3$ alors la série converge

• On a montré à la question 1) que si elle converge pour a, alors elle converge pour tout nombre réel b tel que $b > a$.

$\Rightarrow$ Donc la série converge pour tout $a > 2$.