# CORRECTION DM n° 4
# - MVA101 -

## Exercice 1

a) $$f'(t) = -t\, f(t)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{F}(f'(t))(\omega) = \mathcal{F}(-t f(t))(\omega)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} -t f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} -t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i\omega t}\, dt$$

On fait une intégration par parties en posant :

$u'(x) = -t e^{-t^2/2} \Rightarrow u(x) = e^{-t^2/2}$

$v(x) = e^{-i\omega t} \Rightarrow v'(x) = -i\omega e^{-i\omega t}$

Donc $$\mathcal{F}(f'(t))(\omega) = \cancel{\left[e^{-i\omega t} e^{-t^2/2}\right]_{-\infty}^{+\infty}} + i\omega \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i\omega t}\, dt}_{\hat{f}(\omega)}$$

$$= i\omega \hat{f}(\omega)$$

<u>Remarque</u> : on pourrait aussi utiliser la formule du cours selon laquelle :

$$\mathcal{F}(f'(t))(\omega) = i\omega\, \mathcal{F}(f)(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega).$$

Ici on veut montrer que $\dfrac{d\hat{f}(\omega)}{d\omega} = -\omega \hat{f}(\omega)$.

Or on sait d'après le cours que $$\frac{d\hat{f}(\omega)}{d\omega} = -i \underbrace{\mathcal{F}(t f(t))(\omega)}_{\substack{= -\mathcal{F}(f'(t))(\omega) \\ = -i\omega \hat{f}(\omega)}}$$

Ainsi : $$\frac{d\hat{f}(\omega)}{d\omega} = -i(-i\omega \hat{f}(\omega))$$

$$= \boxed{-\omega \hat{f}(\omega)}$$

b) Puisque la solution de l'équation différentielle (2) s'écrit $y(\xi) = C e^{-\xi^2/2}$ et puisque $\hat{f}(\omega)$ est solution de l'équat° (2) alors on a : $\hat{f}(\omega) = C e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ avec $C$ une constante à déterminer.

Pour déterminer la constante $C$, on se sert de la valeur de $\hat{f}(\omega)$ en $\omega = 0$ :

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i \times 0 \times t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Donc $\hat{f}(0) = C \times e^{-\frac{0^2}{2}} \Leftrightarrow \hat{f}(0) = C \times 1 \Leftrightarrow C = \hat{f}(0) = \sqrt{2\pi}$

Et ainsi : $\boxed{\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\omega^2/2}}$

c) Soit $h(t) = g(at)$. Donc $\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(at) e^{-i\omega t} dt$

On pose le changement de variable : $u = at \Rightarrow du = a\,dt$ et $t = \frac{u}{a}$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(at)\, e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} a\, g(at)\, e^{-i\omega t} dt$

$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{-i\frac{\omega}{a} u} du$$

$$= \boxed{\frac{1}{a}\, \hat{g}\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

d) Posons $h(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$. On cherche $a \in \mathbb{R}$ et une fonction $g$ tels que : $h(t) = g(at)$.

Posons $g(at) = \exp\left(-\frac{(\overbrace{at}^{T})^2}{2}\right)$. Alors :

$$h(t) = g(at) \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{\sigma} \\ g : T \longmapsto \exp\left(-\frac{T^2}{2}\right) = f(T) \text{ autrement dit } g = f. \end{cases}$$

Or on sait d'après la question précédente que :

$\mathcal{F}(g(at))(\omega) = \frac{1}{a}\, \hat{g}\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Donc $\mathcal{F}(g(at))(\omega) = \mathcal{F}\left(\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)\right)(\omega) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$ avec $a = \frac{1}{\sigma}$

$$= \sigma\left(\sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2}{2}\right)\right)$$

$$= \sigma\left(\sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{(\sigma\omega)^2}{2}\right)\right)$$

Donc : $\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \mathcal{F}\left(\exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right)\right)(\omega)$

$\Leftrightarrow \hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \sigma\sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{(\sigma\omega)^2}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \boxed{\hat{\varphi}(\omega) = \exp\left(-\frac{(\sigma\omega)^2}{2}\right)}$

Exercice 2

a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 4L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ -5y - 2z = -10 \\ -5y - 14z = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ -5y - 2z = -10 \\ -10z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ -5y - 2z = -10 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = 6 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}}$

b) $\begin{cases} x - 3z = -3 \\ 2x + my - z = -2 \\ x + 2y + mz = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} x - 3z = -3 \\ my + 5z = 4 \\ 2y + (m+3)z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3z = -3 \\ y = \frac{4-5z}{m} \\ y = \frac{4-(m+3)z}{2} \end{cases}$

On a donc $L_2 = L_3 \Leftrightarrow \frac{4-5z}{m} = \frac{4-(m+3)z}{2}$

$\Leftrightarrow 2(4-5z) = m(4 - mz - 3z)$

$\Leftrightarrow 8 - 10z = 4m - m^2 z - 3mz$

$\Leftrightarrow z(m^2 + 3m - 10) = 4m - 8$

Par conséquent, le système possède une solution unique ssi :

$m^2 + 3m - 10 \neq 0$. On calcule le $\Delta$ : $\Delta = 9 + 40 = 49$

Donc $m_1 = \frac{-3-7}{2} = -5$ et $m_2 = \frac{-3+7}{2} = 2$.

Ainsi, il existe une solution unique ssi : $\boxed{m \neq -5 \text{ et } m \neq 2}$

Remarque : On pouvait aussi trouver ce résultat en résolvant l'équation :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & m & -1 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} \neq 0. \quad (\det \neq 0).$$

c) Sous la condition $m \neq -5$ et $m = 2$ on a donc :

- $z = \frac{4m-8}{(m^2+3m-10)} = \frac{4\cancel{(m-2)}}{(m+5)\cancel{(m-2)}} = \frac{4}{m+5}$
- $y = \frac{4-5z}{m} = \frac{4 - 5\left(\frac{4}{m+5}\right)}{m} = \frac{4m + \cancel{20} - \cancel{20}}{m(m+5)} = \frac{4\cancel{m}}{\cancel{m}(m+5)} = \frac{4}{m+5}$

et

- $x = -3 + 3z = -3 + 3 \times \frac{4}{m+5} = \frac{-3m - 15 + 12}{m+5} = \frac{-3(m+1)}{m+5}$

Donc $\boxed{S = \{(x, y, z)\} = \left\{\left(\frac{-3(m+1)}{(m+5)} ; \frac{4}{m+5} ; \frac{4}{m+5}\right)\right\}}$

## Exercice 3 :

a) $\bullet\ A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\bullet\ A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 10 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

b) $A^3 + aA^2 + bA + cI = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 10 & 0 & -7 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2+2a+2b+c & 0 & -5-3a-b \\ 5+3a+b & 1+a+b+c & -4-a \\ 10+6a+2b & 0 & -7-a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ -2+2a+2b+c=0 \\ (2)\ -5-3a-b=0 \\ (3)\ 5+3a+b=0 \\ (4)\ 1+a+b+c=0 \\ (5)\ -4-a=0 \\ (6)\ 10+6a+2b=0 \\ (7)\ -7-a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5)\ a=-4 \\ (2),(3)\ -5+12-b=0 \Leftrightarrow b=7 \\ (4)\ 1+(-4)+7+c=0 \Leftrightarrow c=-4 \\ (1)\ -2-8+2\times 7-4 = -10+14-4=0 \text{ (ok)} \\ (6)\ 10-24+14=0 \text{ (ok)} \\ (7)\ -7+4+7-4=0 \text{ (ok)} \end{cases}$

Donc $\boxed{a=-4,\ b=7 \text{ et } c=-4}$

c) On a donc $A^3 + aA^2 + bA + cI = 0$

$\Leftrightarrow A^3 - 4A^2 + 7A - 4I = 0$

$\Leftrightarrow A(A^2 - 4A + 7I) = 4I$

$\Leftrightarrow A\left(\frac{1}{4}(A^2 - 4A + 7I)\right) = I$

Cela signifie qu'il existe une matrice de taille (3,3) : $B = \frac{1}{4}(A^2 - 4A + 7I)$ telle que $AB^{-1} = I$. Donc $B = A^{-1}$ et A est inversible.

On a donc $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 4A + 7I)$

$= \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -4 & -4 & 0 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ -1/4 & 1 & -1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$