MVA 005 HT.

Correction du sujet 1.

I

i) f est définie sur $\mathbb{R}$.

ii) On sait que $\lim\limits_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$

donc $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -1$

f n'est donc pas continue en -2.

iii) On sait que $\sin X = X - \frac{X^3}{6} + o(X^3)$ en $X_0 = 0$

donc $\frac{\sin X - X}{X^2} = -\frac{X}{6} + o(X)$ en $X_0 = 0$ donc

$\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{\sin(x+2) - (x+2)}{(x+2)^2} = 0$.

IV f, est, sur l'intervalle, composée de fcts dérivables

l'est donc aussi

$$f'(x) = \frac{(x+2)\cos(x+2) - \sin(x+2)}{(x+2)^2} \quad \text{si } x > -2.$$

d'où f' est du signe demandé.

V $h(x) = (x+2)\cos(x+2) - \sin(x+2)$ est dérivable

sur $]-2, +\infty[$ (en fait sur $\mathbb{R}$) sa dérivée vaut

~~donc est~~ $h'(x) = -(x+2)\sin(x+2)$

VI en 0 $\cos(X) = 1 - \frac{X^2}{2} + o(X^2)$ $\sin(X) = X - \frac{X^3}{6} + o(X^3)$

donc $f'(x) = \frac{-\frac{X^3}{2} + \frac{X^3}{6}}{X^2} + o(X)$ en posant $X = x+2$

donc $\lim\limits_{x \to -2^+} f'(x) = 0$

VII la fonction $-(x+2)\sin(x+2)$ est du ~~même~~ signe opposé à $\sin(x+2)$ sur $]-2,+\infty[$

On a $h(-2+\frac{3\pi}{2}) = -\frac{3\pi}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$

Regardons les variations de h jusqu'à $-2+\frac{3\pi}{2}$

x	-2		$-2+\pi$		$-2+\frac{3\pi}{2}$
h'		$-$	0	$+$	
h	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$

On en déduit que f' est négative (ou nulle) sur un intervalle $[-2, x_0]$ où $x_0 \in \cancel{]\frac{3\pi}{2}[}\ ]-2+\pi, -2+\frac{3\pi}{2}[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires

Il s'ensuit que f est décroissante jusqu'à x_0, puis est à nouveau croissante de x_0 à au moins $-2+\frac{3\pi}{2}$

Ex 2 I) $\int_1^e \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,dt = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln(u^2)}{u}\, 2u\,du = \int_1^{\sqrt{e}} 4\ln(u)\,du$

on pose $u=\sqrt{t}$ ou $t=u^2$ $dt = 2u\,du$

$= 4\left[u\ln(u) - u\right]_1^{\sqrt{e}}$

II) $\int_1^2 \frac{x+1}{x+2}\,dx = \int_1^2 \frac{x+2}{x+2}\,dx - \int_1^2 \frac{dx}{x+2}$

$= 1 - \left[\ln(x+2)\right]_1^2$

III) $x^2+8x+17$ est un trinôme qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ car $8^2-4\times17 = 64-68 = -4$

donc il s'agit d'une arctangente

par le calcul de l'intégrale.

$$\int_{-4}^{-3} \frac{dx}{x^2+8x+17} = \int_{-4}^{-3} \frac{dx}{(x+4)^2+1} = \left[\operatorname{Arctan}(x+4)\right]_{-4}^{-3}$$

$$= \operatorname{Arctan}(1)$$

$$\int_0^1 \frac{x^2+x}{1+x^2} = \int_0^1 1 + \frac{x-1}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 1\,dx + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$- \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \left[\operatorname{Arctan}(x)\right]_0^1$$

Ex 3 : i) $\ell = 2$

ii. $w_{n+1} = v_{n+1} - 2 = \frac{1}{2} v_n + 1 - 2$

$$= \frac{1}{2}(v_n - 2) = \frac{1}{2} w_n.$$

d'où (w_n) est géométrique

iii On a donc $w_n = \frac{1}{2^{n-1}} w_1$ donc

$v_n = 2 + \frac{1}{2^{n-1}}(v_1 - 2)$ d'où $\lim v_n = 2$

iv On a $u_1 \leqslant v_1 = u_1$.

Si $u_n \leqslant v_n$ alors $\frac{1}{2} u_n \leqslant \frac{1}{2} v_n$

donc $\frac{1}{2} u_n + \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{2} v_n + \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{2} v_n + 1$

d'où $u_{n+1} \leqslant v_{n+1}$. si $n \geq 0$

Finalement par le principe de récurrence on a

$u_n \leqslant v_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

V La suite (u_n) est bornée, mais rien n'indique qu'elle soit monotone.

Reprenant le raisonnement du iv. pour un ℓ donné $\ell \geq 1$

soit $(w_n)_{n \geq \ell}$ la suite définie par $w_\ell = v_\ell$

et $w_{n+1} = \frac{1}{2} w_n + \frac{1}{\ell+1}$

On a alors de la même manière que précédemment $\forall n \geq \ell$ $u_n \leq w_n$

Or $\lim w_n = \frac{2}{\ell+1}$ donc pour n'importe quel epsilon, n'importe quel ℓ si n est assez grand on a $0 \leq u_n \leq \frac{2}{\ell+1} + \frac{\varepsilon}{2}$

Comme on peut choisir ℓ pour que $\frac{2}{\ell+1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$

on a pour n assez grand $0 \leq u_n \leq \varepsilon$. Ce qui est la définition de la convergence de (u_n) vers 0.

Exo 4 : L'équation homogène est

$y' - y = 0$ dont on suit que la solution générale est $y(x) = \lambda e^x$

On utilise la variation de la constante

$y(x) = \lambda(x) e^x$ pour résoudre le problème de Cauchy $y'(x) = \lambda'(x) e^x + \lambda(x) e^x$

d'où $\lambda'(x) e^x = e^x \lambda(x)$

donc $\lambda(x) = \cancel{\alpha} = \cos(x)$

donc $y(x) = e^x(\alpha - \cos(x))$

$y(0) = e^0(\alpha - 1) = 2$ donc $\alpha = 3$.

et $y(x) = e^x(3 - \cos(x))$.