MVA101 – Corrigé du devoir n°3

Exercice 1

On considère la fonction *f* paire et de période 2, définie sur l'intervalle [0 ; 1 [par :

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

1. Etudier la continuité de la fonction *f*.

Commençons par étudier la continuité en 1.

$\lim_{x \to 1-} f(x) = 3 - 6 + 2 = -1$, tandis que $\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to -1+} f(x)$ par périodicité.
Or sur]-1 ;0] , la fonction *f* a pour formule $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$. En effet, $f(x) = f(-x)$ par parité, avec $f(-x) = 3(-x)^2 - 6(-x) + 2$ puisque $-x$ appartient à l'intervalle [0 ; 1 [

Cela permet de calculer $\lim_{x \to -1+} f(x) = 3 - 6 + 2 = -1$

Il s'ensuit que *f* est continue en 1 et donc sur [0 ;2[

Par ailleurs, *f* est continue en 0 car $\underline{\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x)}$ par parité
La périodicité de *f* permet de conclure à la continuité de la fonction sur l'ensemble des réels.

2. Etudier la dérivabilité de la fonction *f*

Sur [0 ; 1 [, $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$
Sur]-1 ;0], $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$

Sur]0 ;1[, *f* est dérivable et $f'(x) = 6x - 6$
Sur]-1 ;0[, *f* est dérivable et $f'(x) = 6x + 6$

En 0, *f* n'est pas dérivable mais elle admet une dérivée à droite égale à - 6 et une dérivée à gauche égale à 6

Par périodicité, ce qui est vrai en 0 est vrai en tout entier relatif pair: *f* n'y est pas dérivable

Sur [0 ; 1 [, $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$

Sur]1 ;2], $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$.
En effet, par périodicité, $f(x) = f(x-2)$ avec x -2 dans]-1 ;0] ;
et donc $f(x-2) = 3(x-2)^2 + 6(x-2) + 2 = 3x^2 - 6x + 2$

Sur]0 ;1[, f est dérivable et $f'(x) = 6x - 6$
Sur]-1 ;0[, f est dérivable et $f'(x) = 6x - 6$

Il s'ensuit qu'en 1, f est dérivable de dérivée nulle.

En conclusion, f est dérivable en tout réel différent d'un entier relatif pair.

3. Est-elle dérivable deux fois ?

Sur]0 ;1[, f' est dérivable et $f''(x) = 6$
Sur]-1 ;0[, f' est dérivable et $f''(x) = 6$
En 1, f' est dérivable et $f''(x) = 6$
En 0, f' n'est même pas définie.

En conclusion, f est dérivable deux fois en tout réel différent d'un entier relatif pair, et sa dérivée seconde vaut 6.

4. Tracer la courbe représentative de *f* sur [-3 ;3] .

Voir feuille à part

5. Calculer les coefficients de *f* et déterminer sa série de Fourier.

La fonction étant paire, les coefficients b_n sont tous nuls et le calcul des a_n est simplifié :

$$a_0 = \int_0^1 (3t^2 - 6t + 2)dt = \left[t^3 - 3t^2 + 2t\right]_0^1 = 0$$

Pour n non nul, il vient :

$$a_n = 2\frac{2}{2}\int_0^1 (3t^2 - 6t + 2)\cos(n\omega t)dt \text{, avec } \omega = \pi$$

Effectuons une première intégration par parties.

$$a_n = 2\left[(3t^2 - 6t + 2)\frac{\sin n\pi t}{n\pi}\right]_0^1 - 2\int_0^1 (6t - 6)\frac{\sin n\pi t}{n\pi}dt = -\frac{12}{n\pi}I$$

où I se calcule par une deuxième intégration par parties

$$I = \int_0^1 (t-1)\sin n\pi t dt = \left[-(t-1)\frac{\cos n\pi t}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos n\pi t}{n\pi} dt = \left[-(t-1)\frac{\cos n\pi t}{n\pi}\right]_0^1 - \frac{1}{(n\pi)^2}\left[\sin n\pi t\right]_0^1$$

Il s'ensuit $I = -\frac{1}{n\pi}$, ce qui donne

$$a_n = \frac{12}{n^2\pi^2}$$

D'où la série de Fourier

$$S(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{12}{n^2\pi^2}\cos n\pi t$$

6. Préciser la convergence de cette série.

Comme la série numérique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann), la série de Fourier converge normalement et donc uniformément, et sa somme est continue.

7. Calculer $S = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et $T = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$

a. $S = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ se calcule en appliquant le théorème de Dirichlet en $t = 0$ où f est continue et donc où $S(0) = f(0) = 2$

Comme S(0) = $\sum_{n\geq 1}\frac{12}{n^2\pi^2}$, cela donne $\frac{12}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = 2$

Il s'ensuit :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

b. $T = = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$ se calcule grâce à Bessel-Parseval qui s'écrit, dans notre cas :

$$2\int_0^1 \left|3t^2 - 6t + 2\right|^2 dt = \sum_{n\geq 1}\left|\frac{12}{n^2\pi^2}\right|^2$$

$$2\int_0^1 (9t^4 + 36t^2 + 4 - 36t^3 + 12t^2 - 24t)dt = \frac{144}{\pi^4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{72}\int_0^1 (9t^4 - 36t^3 + 48t^2 - 24t + 4)dt$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{72}\left[\frac{9t^5}{5} - 9t^4 + 16t^3 - 12t^2 + 4t\right]_0^1 = \frac{\pi^4}{72}(\frac{9}{5} - 9 + 16 - 12 + 4) = \frac{\pi^4}{90}$$

8. **Que dire de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\ \pi}\sin n\pi t$?**

f étant continue sur l'ensemble des réels, nous pouvons dériver terme à terme la série de Fourier de *f* et nous obtenons la série de Fourier de *f' :*

$$S'(t) = \sum_{n\geq 1}\frac{-12}{n\ \pi}\sin n\pi t$$

<u>Exercice 2</u>

1. **Soit *f* une fonction de période *T* et $(c_n)_{n\in N}$ la suite de ses coefficients de Fourier complexes. Soit *g* la fonction définie par :**

$$g(x) = f(x) - f\left(x - \frac{T}{2}\right)$$

a. **Etudier la périodicité de *g***

Pour tout réel *x*, $\quad g(x+T) = f(x+T) - f\left(x + T - \frac{T}{2}\right) = f(x+T) - f\left(x + \frac{T}{2}\right)$

Or la *T*-périodicité de *f* implique *f(x+T) = f(x)* et $f\left(x + \frac{T}{2}\right) = f\left(x - \frac{T}{2}\right)$.

Il s'ensuit que *g(x+T) = g(x),* ce qui démontre la *T*-périodicité de *g*.

b. Déterminer les coefficients de Fourier complexes de *g* notés d_n en fonction des coefficients c_n de *f*.

Nous appellerons *t* la variable d'intégration, comme il est d'usage pour les séries de Fourier, et poserons $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

$$d_n = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)e^{-in\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt - \frac{1}{T}\int_0^T f(t-\frac{T}{2})e^{-in\omega t}dt$$

Etudions la dernière intégrale en y effectuant le changement de variable $x = t - \frac{T}{2}$

$$\int_0^T f(t-\frac{T}{2})e^{-in\omega t}dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x)e^{-in\omega(x+\frac{T}{2})}dx = e^{-in\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x)e^{-in\omega x}dx = (-1)^n c_n$$

D'où il vient :

$$d_n = c_n - (-1)^n c_n = c_n\left(1-(-1)^n\right)$$

2. On considère la fonction *f* de période 2 définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0;1[\\ 0 & x \in [1;2[\end{cases}$$

Calculer la série de Fourier de *f* sous sa forme complexe.

$$c_n = \frac{1}{2}\int_0^1 te^{-in\omega t}dt$$

Cela donne $c_0 = \frac{1}{4}$; et pour *n* non nul, une intégration par partie permet de calculer :

$$c_n = \frac{1}{2\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right) + i\frac{(-1)^n}{2\pi n}$$

En effet,

$$c_n = \frac{1}{2}\int_0^1 te^{-in\omega t}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{-in\omega}e^{-in\omega t}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-in\omega}\right)e^{-in\omega} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-in\omega}\right)^2\left(e^{-in\omega}-1\right)$$

Or $\omega=\pi$ donc $e^{-in\omega}=e^{-in\pi}=(-1)^n$, d'où $c_n = \frac{1}{2\pi^2 n^2}\left((-1)^n-1\right)+i\frac{(-1)^n}{2\pi n}$.

La série de Fourier de *f* est alors :

$$S(t) = c_0 + \sum_{n\neq 0} c_n e^{in\omega t} \text{ , avec } \omega=\pi$$

3. En déduire le développement en série de Fourier complexe de la fonction *g* de période 2 définie par :

$$g(x)=\begin{cases} x & x\in[0;1[\\ 1-x & x\in[1;2[\end{cases}$$

On vérifie aisément que le résultat de la question 1 s'applique ici avec $T = 2$, car

$$g(x) = f(x) - f(x-1)$$

D'où les coefficients de Fourier de *g :*

$$d_n = c_n\left(1-(-1)^n\right) = \left[\frac{1}{2\pi^2 n^2}\left((-1)^n-1\right)+i\frac{(-1)^n}{2\pi n}\right]\left(1-(-1)^n\right)$$

Si n est pair, d_n est nul.

Si n est impair, $d_n = 2\ c_n = -\frac{2}{\pi^2 n^2}-\frac{i}{\pi n}$

* * * * * * * *