T. Horsin

Sujet de MVA013 Année Universitaire 2014-2015.

Base mathématique.

Département IMATH Examen Session 2.

Case 2D5000 Date: 13 avril 2015.

Durée de l'examen: 3h.

Sujet de 3 pages dont celle-ci.

Responsable: Thierry Horsin.

Tous documents manuscrits ou dactylographiés personnels autorisés.

Les ouvrages édités ne sont pas autorisés.

Calculatrice autorisée.

Les téléphones mobiles et autres équipements communicants
doivent être éteints et rangés dans les sacs pendant toute la durée de l'épreuve.

1 Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction telle que

$$f(x) = \cos(x) + \cos(2x)/2.$$

i. Déterminer $\mathcal{D}_f$.

ii. Montrer que f est 2π-périodique.

iii. f est-elle impaire ?

iv. Montrer que $f'(x) = -\sin(x)(1 + 2\cos(x))$.

v. Montrer que f est décroissante sur $[0, 2\pi/3]$, croissante sur $[2\pi/3, \pi]$.

vi. Tracer f.

2 Exercice

Calculer les intégrales suivantes:

i. $\int_0^{\pi} e^{2x}\cos(x)dx$, (on pourra faire deux intégrations par parties)

ii. $\int_0^1 xe^{x^2}dx$,

iii. $\int_0^1 x^3e^{x^2}dx$, on rappelle que $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$ et on pourra faire une intégration par parties.

3 Exercice

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2y \\ -4x+9y \end{pmatrix}.$$

i. Donner A la matrice de f.

ii. f est-elle diagonalisable ?

4 Exercice

On considère le problème de Cauchy (P) défini par

$$\begin{cases} y''(x) - 12y'(x) + 35y(x) = (24x^2 - 20x + 2)e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 0. \end{cases}$$

i. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle sans second membre

$$y'' - 12y' + 35y = 0.$$

ii. Montrer que l'on peut trouver une solution particulière de

$$y''(x) - 12y'(x) + 35y(x) = (24x^2 - 20x + 2)e^x, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

sous la forme

$$y(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$$

où a b et c sont des réels à déterminer.

iii. Résoudre le problème de Cauchy (P).