T. Horsin

Sujet de MVA013 — Année Universitaire 2014-2015.

Base mathématique.

Département IMATH — Examen Session 1.

Case 2D5000 — Date: 9 février 2015.

Durée de l'examen: 3h.

Sujet de 2 pages dont celle-ci.

Responsable: Thierry Horsin.

Tous documents manuscrits ou dactylographiés personnels autorisés.

Calculatrice autorisée.

Les téléphones mobiles et autres équipements communicants
doivent être éteints et rangés dans les sacs pendant toute la durée de l'épreuve.

1 Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction telle que

$$f(x) = e^x \ln(x).$$

i. Montrer que $\mathscr{D}_f =]0, +\infty[$.

ii. Montrer que $f'(x) = e^x \ln(x) + \frac{e^x}{x} = \frac{x \ln(x) + 1}{x} e^x$.

iii. On admet que $f' > 0$. Tracer f.

iv. Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

2 Exercice

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes:

i. $\int_0^1 e^x x dx$,

ii. $\int_0^\pi \cos(x)(x+1)dx$,

iii. $\int_1^2 \ln(x)\ln(x)dx$. On rappelle que $(x\ln(x) - x)' = \ln(x)$.

3 Exercice

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ -2x + 9y \end{pmatrix}.$$

i. Donner A la matrice de f.

ii. f est-elle diagonalisable ?

4 Exercice

On considère le problème de Cauchy (P) défini par

$$\begin{cases} y''(x) - 11y'(x) + 24y(x) = (14x^2 - 4x + 7)e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0, \ y'(0) = -1. \end{cases}$$

i. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle sans second membre

$$y'' - 11y' + 24y = 0.$$

ii. Montrer que l'on peut trouver une solution particulière de

$$y''(x) - 11y'(x) + 24y(x) = (14x^2 - 4x + 7)e^x, \ \forall \text{ù} x \in \mathbb{R},$$

sous la forme $e^x(ax^2 + bx + c)$ où a b et c sont des réels à déterminer.

iii. Résoudre le problème de Cauchy (P).