le cnam

MVA101 - Transformation de Laplace

Ce cours permet d'introduire la transformée de Laplace (mais il ne constitue pas un cours ni même un résumé sur le calcul opérationnel de Laplace). Nous introduirons ici uniquement la définition de la transformée de Laplace unilatérale (c'est à dire pour les fonctions à support positif) et les diverses propriétés utiles pour la résolution des équations différentielles ordinaires.

1 Introduction et motivations

En mathématiques, la transformation de Laplace est une transformation intégrale, c'est-à-dire une opération associant à une fonction continue f (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ou dans $\mathbb{C}^n$) une nouvelle fonction dite transformée de Laplace de f, notée traditionnellement F, via une intégrale.

$\longrightarrow$ Dans le cas présent nous nous limiterons aux fonctions f continues par morceaux d'une variable et à **support positif**, c'est à dire les fonctions nulles sur $]-\infty, 0[$ et continues par morceaux sur $[0, +\infty[$.
On note traditionnellement t le paramètre générique de f (formant ainsi $f(t)$), tandis que l'on note plutôt p celui de sa transformée de Laplace F (on écrit donc $F(p)$).

En physique, ce type de fonction f est appelé fonction *causale* et la transformation de Laplace est souvent interprétée comme un passage du domaine du temps t au domaine des fréquences p (complexes).

La transformation de Laplace généralise la transformation de Fourier : les fonctions admettant une transformée de Fourier admettent toutes une transformée de Laplace, mais la réciproque n'est pas vraie. Mais contrairement à la transformation de Fourier (qui est utilisée pour la détermination du spectre d'un signal périodique ou même quelconque), elle tient compte des conditions initiales et peut ainsi être utilisée en théorie des vibrations mécaniques ou en électricité dans l'étude des régimes forcés sans négliger le régime transitoire. De manière générale, les propriétés de la transformation de Laplace par rapport à la dérivation permettent une résolution plus simple de certaines équations différentielles. Elle est donc pour cette raison très utilisée en automatique.

2 Définition et abscisse de convergence

Définition : Soit f une fonction à support positif et localement intégrable (ou éventuellement généralisée, telle que la « fonction de Dirac »). La transformée de Laplace unilatérale de f est la fonction F de la variable complexe p, définie par :

$$\mathrm{F}(p) = \mathcal{L}(f(t))(p) = \int_{0^-}^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Vocabulaire :

- p est la variable (complexe) dans le domaine des fréquences (analogue à ω en Fourier)
- $\mathcal{L}$ est la transformation de Laplace (analogue à $\mathcal{F}$ en Fourier) : c'est une application
- $F(p)$ est la transformée de Laplace de la fonction origine f (analogue à $\hat{f}(\omega)$ en Fourier)

Condition nécessaire d'existence de la transformée de Laplace :
La formule (1) est valide lorsque $Re(p) > \alpha_0$, où α_0 est l'abscisse de convergence, avec $-\infty \leq \alpha_0 \leq +\infty$.

Définitions :
- On dit que f est à **croissance exponentielle d'ordre** α s'il existe $A, B > 0$ tels que :

$$\forall\, t \geq A,\ |f(t)| \leq Be^{\alpha t} \tag{2}$$

- On appelle **abscisse de convergence** de la transformée de Laplace de f le réel $\alpha_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ défini par :

$$\alpha_0 = \inf \{\alpha \in \mathbb{R},\ \text{tels que } f \text{ est à croissance exponentielle d'ordre } \alpha\} \tag{3}$$

Conséquence : Si $\alpha = +\infty$, alors la transformée de Laplace de f n'est pas définie.

3 Propriétés de la transformée de Laplace

• **Linéarité** de la transformation de Laplace : soient les fonctions f, g et deux nombres complexes a et b :

$$\mathcal{L}(af + bg) = a\,\mathcal{L}(f) + b\,\mathcal{L}(g). \tag{4}$$

• **Retard** (ou translation temporelle) : Soit $t_0 > 0$ et $g(t) = f(t - t_0)$. Alors pour tout $\alpha > \alpha_0$ on a :

$$\mathcal{L}(g)(p) = e^{-pt_0}\mathcal{L}(f)(p) \tag{5}$$

• **Comportement en l'infini** : On a $\lim\limits_{p \to +\infty} \mathcal{L}(f)(p) = 0$

• **Dérivation (ordre 1)** : Appliquée à la dérivée f' de f, la transformation de Laplace correspond, à une constante additive près, à une multiplication par p de la transformée de f :

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^-). \tag{6}$$

Preuve : On cherche à calculer $\mathcal{L}(f') = \int_{0^-}^{\infty} \mathrm{e}^{-pt} f'(t)\,\mathrm{d}t$. En intégrant par parties, on obtient :

$$\mathcal{L}(f') = \left[\mathrm{e}^{-pt} f(t)\right]_{0^-}^{\infty} + p\int_{0^-}^{\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t = p\mathcal{L}(f) - f(0^-).$$

<u>Exemple</u> : fonction de Heaviside (nécessité de la borne inférieure 0^-) :
Soit $\mathcal{U}$ la fonction de Heaviside définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 0. \end{cases}$ Cette fonction étant discontinue, elle n'est pas dérivable au sens habituel. En revanche, sa dérivée au *sens des distributions* est la « fonction » de Dirac δ. Ainsi :

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}') = \mathcal{L}(\delta) = p\mathcal{L}(\mathcal{U}) - \mathcal{U}\left(0^-\right) = 1 - 0 = 1,$$

puisque $\mathcal{L}(\mathcal{U}) = \dfrac{1}{p}, Re(p) > 0$. On notera que si l'on remplaçait, dans la formule (6), $f(0^-)$ par $f(0^+)$, on trouverait $\mathcal{L}(\delta) = 0$ (ce qui est faux).

• **Dérivation (ordre n)** : Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0, +\infty[$, alors on peut itérer la formule (6) :

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n\mathcal{L}(f)(p) - p^{n-1}f(0^-) - p^{n-2}f'(0^-) - p^{n-3}f''(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-). \tag{7}$$

• **Valeur initiale** : Si $\mathcal{L}(f)(p)$ a une abscisse de convergence finie et si la limite de f dans le domaine temporel existe, alors :

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{p \in \mathbb{R}, p \to +\infty} p\mathcal{L}(f)(p) \tag{8}$$

(On notera que c'est la seule propriété où un 0^+ apparaît pour la variable t.)

3.1 Table de transformées de Laplace usuelles

La transformation de Laplace est **injective** : si $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ au voisinage de l'infini, alors $f = g$. En particulier, si F est fixée, il existe au plus une fonction f telle que $\mathcal{L}(f) = F$.
Ainsi, par calcul ou plus communément par usage de tables, il est possible d'inverser la transformation (cf table ci-après).

4 Résolution d'une EDO à l'aide de la transformation de Laplace

Afin de résoudre une EDO à l'aide de la transformation de Laplace, on procède ainsi :

1. Appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle en utilisant les propriétés de la transformée de Laplace et la table des transformées (il faudra prendre en compte les conditions initiales s'il y en a).
2. Manipuler l'expression algébrique et trouver une solution $Y(p) = \mathcal{L}(y(t))(p)$ en fonction des entrées et des conditions initiales.
3. Écrire le membre de droite de l'équation ci-dessus comme une décomposition en éléments simples (calcul des résidus).
4. Utiliser la table des transformées inverses pour obtenir la solution $y(t)$ dans le domaine temporel.

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(p)$
$\mathcal{U}(t)$	$\frac{1}{p}$
$e^{at}\mathcal{U}(t),\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{p-a}$
$t^n\mathcal{U}(t),\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{at}\mathcal{U}(t),\ n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)\mathcal{U}(t),\ \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)\mathcal{U}(t),\ \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)e^{at}\mathcal{U}(t),\ \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)e^{at}\mathcal{U}(t),\ \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
$\mathcal{U}(t-a)f(t-a),\ a > 0$	$e^{-ap}\mathcal{L}(f)(p)$
$f(t)e^{at}$	$\mathcal{L}(f)(p-a)$
$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a}\mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{a}\right)$
$f'(t)$	$p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n\mathcal{L}(f)(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p)$

Exercice 1 :

Résoudre l'équation différentielle d'ordre 1 suivante à l'aide de la transformée de Laplace :

$$\tau y'(t) + y(t) = Ke(t)$$

Les conditions initiales sont $y(0) = y_0$ et on suppose que $e(t) = e_0$, $\forall\ t > 0$ avec e_0 une constante.

Exercice 2 :

Résoudre l'équation différentielle d'ordre 2 suivante à l'aide de la transformée de Laplace :

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t$$

Les conditions initiales sont $y(0) = 1, y'(0) = 0$.