le cnam

MVA101 - ED9 - Transformation de Fourier (1)

Rappels de cours :

1- Description qualitative et motivations

Quelle est la différence entre une série de Fourier et une transformée de Fourier ?

- **Série de Fourier** : Une série de Fourier est l'écriture d'une fonction f **périodique** sous forme de **somme partielle** de fonctions trigonométriques dont les fréquences sont des **multiples d'une fréquence de base**. On a vu que la série de Fourier $S_N f$ convergeait, sous les bonnes hypothèses, vers la fonction de départ f.

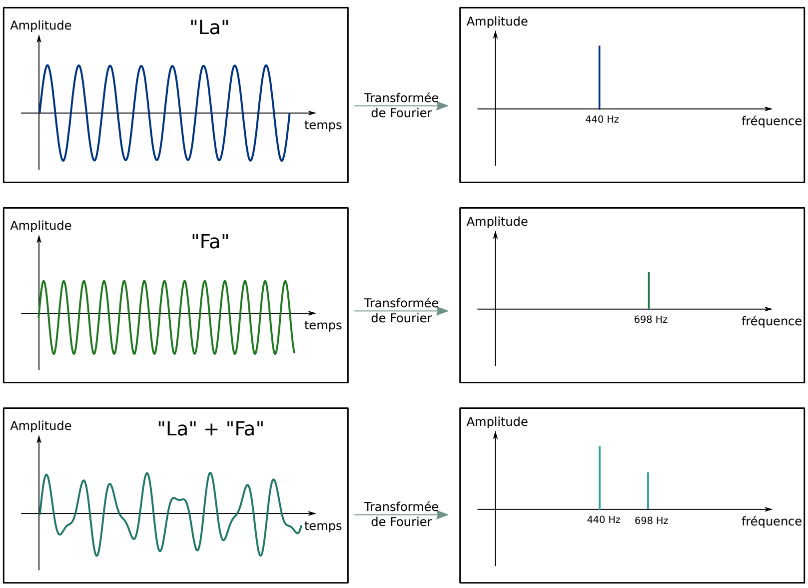
- **Transformée de Fourier** : La transformation de Fourier est une extension, pour les fonctions **non périodiques**, du développement en série de Fourier des fonctions périodiques. Elle s'exprime comme la **somme infinie** des fonctions trigonométriques de **toutes fréquences**.

  La transformation de Fourier associe à une fonction f intégrable, non nécessairement périodique, définie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une nouvelle fonction appelée transformée de Fourier et notée $\widehat{f}$ dont la variable indépendante peut s'interpréter en physique comme la fréquence ou la pulsation.

  En d'autres mots, la transformée de Fourier du signal f permet donc de générer ce que l'on appelle le **spectre fréquentiel de** f, et les valeurs obtenues sont représentées selon l'amplitude et la phase, toutes deux tracées en fonction de la fréquence. Cela signifie que la transformée de Fourier d'une fonction fournit un spectre décrivant la présence plus ou moins importante d'une fréquence dans la fonction de départ.

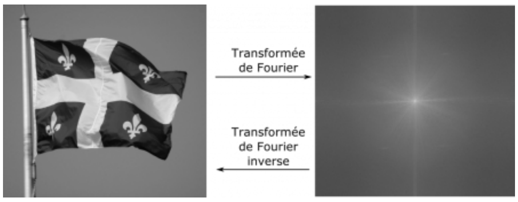
Quelques exemples concrets de transformées de Fourier de signaux : *(source : les petites curies du net)*

- **Signaux sonores** : Le signal d'origine est un signal sonore variable en **temps**. Imaginons que l'on émette un son de fréquence 440 Hz (ce qui correspond à un "la" pur) joué sur une durée de temps infini. La transformée de Fourier de ce signal sera un simple pic à 440 Hz, toutes les autres fréquences seront nulles. Si on joue un "la" à 440 Hz et un "fa" un peu moins fort à l'octave supérieure, à 698 Hz, toujours sur une durée infinie, alors la transformée de Fourier sera composée de deux pics, un à 440 Hz, l'autre un peu moins élevé à 698 Hz, toutes les autres fréquences étant nulles.

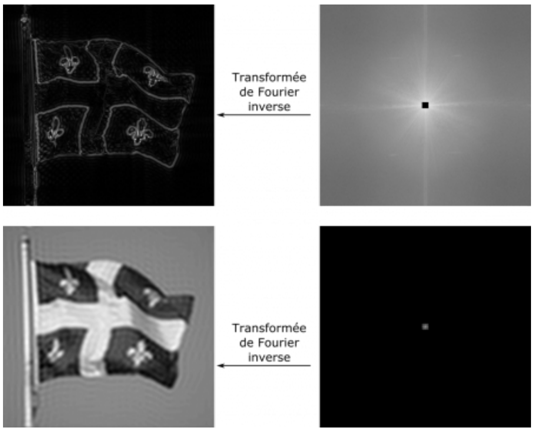


Si on joue tout un morceau de musique, la transformée de Fourier sera relativement complexe à déterminer. Mais la transformée de Fourier marche en sens inverse (transformation inverse de Fourier, cf prochaine séance): en connaissant la transformée de Fourier d'un signal, il est possible de retrouver le signal de départ aisément. L'intérêt est donc de prendre la transformée de Fourier d'un signal, la modifier comme on le veut (supprimer des fréquences, en rajouter, multiplier des signaux entre eux...), puis recalculer le signal transformé.

- **Signaux spatiaux** : Considérons par exemple les images. Les images correspondent à des signaux variables en **espace**. Pour une image à deux dimensions, un pic de la transformée de Fourier est représenté par un pixel plus ou moins brillant sur l'image de Fourier.



  Concrètement, ce qui est au centre de l'image de Fourier correspond aux basses fréquences de l'image, c'est à dire aux variations de contraste sur de larges distances, tandis que les extrémités correspondent aux hautes fréquences, c'est à dire les bords, les coins, etc... Ainsi, si on supprime les basses fréquences, on ne garde que les arêtes de l'image et si on supprime les hautes fréquences, on obtient une image floue:



2- Transformation de Fourier

a) Fonctions absolument intégrables sur la droite réelle

On dit qu'une fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$ est convergente, c'est à dire finie. On écrit alors $f \in L^1(\mathbb{R})$.

b) Définition de la transformée de Fourier

Comme dit précédemment la transformée de Fourier est une extension de la série de Fourier, pour des fonctions non périodiques intégrables. Elle s'exprime comme somme infinie des fonctions trigonométriques de toutes fréquences, en utilisant des exponentielles plutôt que des fonctions sinusoïdales. Une telle sommation se présente sous forme d'intégrale.

Définition : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier est la fonction $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ donnée par la formule :

$$\mathcal{F}(f) : \omega \mapsto \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, \mathrm{d}t. \tag{1}$$

La définition ci-dessus signifie que l'opérateur "transformation de Fourier" $\mathcal{F}$ transforme la fonction f en la fonction $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$, où la fonction $\widehat{f}$ correspond au spectre fréquentiel de f: c'est donc une fonction dont la variable est une fréquence. Cette fréquence est notée ω.

Vocabulaire :

- **Transformation** de Fourier : C'est l'opérateur $\mathcal{F}$ qui transforme la fonction f en $\widehat{f}$.
- **Transformée** de Fourier : C'est la fonction $\widehat{f}$, décrivant le spectre fréquentiel de f.
- ω est appelée **pulsation**. Cette quantité dépend de la fréquence ν et est définie par $\omega = 2\pi\nu$. Elle correspond à la valeur de la vitesse de rotation qu'aurait un système en rotation de fréquence ν.
- Si on écrit $\widehat{f}(\omega)$ sous la forme polaire $\widehat{f}(\omega) = A(\omega)e^{i\phi(\omega)}$ (avec $A(\omega) > 0 \in \mathbb{R}$, et $\phi(\omega)$ défini modulo 2π), on utilise la terminologie suivante :
  - $A(\omega)$ est appelé **spectre** de f
  - $A^2(\omega)$ est appelée **énergie spectrale** de f
  - $\phi(\omega)$ est appelée **phase spectrale** de f

c) Théorème de Riemann-Lebesgue

Théorème : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est bornée :

(2)
$$\forall\ \omega \in \mathbb{R},\ \widehat{f}(\omega) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t.$$

De plus, la fonction $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ tend vers 0 quand la fréquence ω tend vers l'infini :

(3)
$$\lim_{\omega \longrightarrow\ +\infty} \widehat{f}(\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\omega \longrightarrow\ -\infty} \widehat{f}(\omega) = 0$$

d) Linéarité

Si f et g sont des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ et λ un scalaire (c'est à dire un nombre complexe) arbitraire, on a :

- $\mathcal{F}(f+g) = (\mathcal{F}f) + (\mathcal{F}g)$
- $\mathcal{F}(\lambda f) = \lambda(\mathcal{F}f)$

e) Retard (ou translation temporelle)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction intégrable à qui on applique une translation temporelle de $t_0 \in \mathbb{R}$. La transformée de Fourier de la fonction f translatée est alors égale à:

(4)
$$\mathcal{F}(f(t-t_0))(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}\ \mathcal{F}(f(t))(\omega), \qquad \forall\ \omega \in \mathbb{R}$$

En d'autres mots, reculer un signal dans le domaine temporel revient à multiplier sa transformée de Fourier par une exponentielle complexe $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}$ dans le domaine fréquentiel.

Preuve : $\mathcal{F}(f(t-t_0))(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t_0)}\, \mathrm{d}t$. En posant le changement de variable $u = t - t_0$ on obtient alors l'expression (4).

f) Continuité de la transformée de Fourier

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est une fonction continue de la variable ω :

(5)
$$\lim_{\theta \longrightarrow\ 0} \widehat{f}(\omega+\theta) = \widehat{f}(\omega), \qquad \forall\ \omega \in \mathbb{R}$$

Exercice 1 :

Soit $\mathbb{1}_{[a,b]}$ la fonction définie par :

$$\mathbb{1}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

1. $f(t) = t\ \mathbb{1}_{[-1,1]}$
2. $f(t) = \mathrm{e}^{-|t|/T}$, avec $T \in \mathbb{R}$.
3. $$f(t) = \begin{cases} 1+t & \text{si} \quad -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2 :

1. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = \mathbb{1}_{[-a,a]}$.
2. Soit $g(t) = \sin(t)\mathbb{1}_{[-a,a]}$.
   (a) Calculer la transformée de Fourier de g. (Indication : à partir de $\sinh(it)$ exprimer $\sin(t)$ à l'aide d'exponentielles complexes, puis utiliser la fonction sinus cardinal pour l'expression du résultat final).
   (b) Décrire ce qui se passe quand a tend vers $+\infty$.

Formulaire

- sinus hyperbolique :
  $\sinh : z \mapsto \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}$
  $\sinh(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i\sin(x), \quad x \in \mathbb{R}$
- cosinus hyperbolique :
  $\cosh : z \mapsto \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}$
  $\cosh(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}$
- sinus cardinal :

$$\mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} \sin(t)/t & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$