Théorème sur la convergence normale d'une série de Fourier :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction **périodique** de période T, **continue** et **lisse par morceaux** (C^1 par morceaux).

$\Longrightarrow$ Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série de Fourier $S_N f(t)$ converge normalement (et donc uniformément), vers $f(t)$ quand $N \to +\infty$.

Exercice 2 : Démonstration du théorème sur la convergence normale

Soit f une fonction 2π-périodique de $L^2(0, 2\pi)$, continue et C^1 par morceaux.

On souhaite démontrer que la série de Fourier de f, $S_N f$, converge normalement vers f.

1. Démontrer l'assertion suivante : " Montrer la convergence normale de $S_N f$ est équivalent à montrer la convergence de la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ ", où c_n sont les coefficients exponentiels de la série de Fourier $S_N f$.
2. Exprimer les coefficients de Fourier complexes c_n en fonction des coefficients de Fourier c'_n de la dérivée de f.
3. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le résultat de la question ci-dessus, montrer que la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ converge.

Correction de l'exercice 2

1. Prenons tout d'abord le cas général de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$. On rappelle que, par définition, cette série est normalement convergente sur I si la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{t\in I} |f_n(t)|$ converge, c'est à dire si il existe une suite $m_n > 0$ telle que :

$$\underbrace{|f_n(t)| \leq m_n, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}}_{\text{majoration des } |f_n(t)| \text{ par une suite } m_n \text{ (indépendante de } t)} \qquad \text{avec} \qquad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} m_n < \infty}_{m_n \text{ est le terme général d'une série convergente}}$$

Ici on s'intéresse à la série de Fourier de f, à coefficients exponentiels, c'est à dire : $S_N f(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$.

Dans ce cas là, les fonctions $f_n(t)$ sont donc : $f_n(t) = c_n e^{int}$.

Ici on cherche à majorer $|f_n(t)| = |c_n e^{int}|$ par une suite qui ne dépend pas de t. Et on a :

$$|c_n e^{int}| \leq |c_n|$$

Par conséquent, la série $S_N f(t)$ est normalement convergente si la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ est convergente, c'est à dire si $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$.

2. Les coefficients de Fourier c'_n de la dérivée de f sont donnés par :

$$\begin{aligned} c'_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^T f'(t) e^{-int}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[f(t) e^{-int} \right]_{-\pi}^{\pi} + in \int_0^T f(t) e^{-int}\, dt \right) \qquad \text{(IPP)} \end{aligned}$$

or $e^{-in\pi} = \left(e^{-i\pi}\right)^n = (-1)^n$ et $e^{in\pi} = \left(e^{i\pi}\right)^n = (-1)^n$.

Donc $\left[f(t)e^{-int}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$ et ainsi :

$$\begin{aligned} c'_n &= \frac{1}{2\pi}\left(in\int_0^T f(t)e^{-int}\, dt\right) \\ &= inc_n \end{aligned}$$

Les coefficients de Fourier c'_n de la dérivée f' sont donc donnés par $c'_n = inc_n \iff c_n = \frac{1}{in}c'_n = \frac{-1}{n}c'_n i$.

3. D'après la question 2. on a donc :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{-1}{n}c'_n\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{n}c'_n\right| = |c_0| + \sum_{n\neq 0} \left|\frac{1}{n}c'_n\right|$$

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| = |c_0| + \sum_{n\neq 0} \left|\frac{1}{n}c'_n\right| \leq |c_0| + \left(\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n\neq 0}|c'_n|^2\right)^{1/2} < \infty$$

car $\displaystyle\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$ et car l'inégalité de Bessel-Parseval, appliquée à la dérivée f' donne :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c'_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\, dt < \infty, \quad \text{vu les hypothèses sur } f.$$