le cnam

MVA101 - ED8 - Séries de Fourier (deuxième partie)

Rappels de cours :

1- L'espace L^2

a) Définition

Une fonction f périodique de période T est dite de **carré intégrable** si et seulement si l'intégrale $\int_0^T |f(t)|^2 \, dt$ est finie. On note alors $f \in L^2(0,T)$ où L^2 est l'espace des fonctions de carré intégrable.

b) L^2 est un espace vectoriel

L'espace $L^2(0,T)$ des fonctions de carré intégrable est un espace vectoriel, c'est à dire que :

- La somme de deux fonctions de carré intégrable est elle aussi de carré intégrable : $f, g \in L^2(0,T) \implies (f+g) \in L^2(0,T)$
- Le produit d'une fonction de carré intégrable par un scalaire est lui aussi de carré intégrable : $f \in L^2(0,T),\ \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda f \in L^2(0,T)$

c) Produit scalaire et ses propriétés

Si f et g appartiennent à $L^2(0,T)$, le nombre complexe $\int_0^T f(t)\overline{g(t)} \, dt$ définit le produit scalaire de f par g dans l'espace $L^2(0,T)$. Ce produit scalaire est alors noté $(f|g)$ (ou encore parfois (f,g) ou $\langle f,g \rangle$) et on a :

$$(f|g) = \int_0^T f(t)\overline{g(t)} \, dt \tag{1}$$

Remarque : Dans le contexte des séries de Fourier, on utilise souvent le produit scalaire normalisé par $\frac{1}{T}$. Dans ce cas on a alors :

$$(f|g) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)} \, dt$$

Quelques propriétés du produit scalaire :

Soient $f, g, h \in L^2(0,T)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

- $(f|f) \geq 0, \quad \forall f \in L^2(0,T)$
- $(f|f) = 0 \Longrightarrow f$ est nulle.
- $(f+g|h) = (f|h) + (g|h)$
- $(f|g+h) = (f|g) + (f|h)$

- $(\lambda f|g) = \lambda (f|g)$
- $(f|\lambda g) = \overline{\lambda}(f|g)$
- $(g|f) = \overline{(f|g)}$

d) Norme L^2

Pour $f \in L^2(0,T)$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_0^T |f(t)|^2 \, dt} = \left(\int_0^T |f(t)|^2 \, dt\right)^{1/2}$. L'application de $L^2(0,T)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $f \in L^2(0,T) \longmapsto \|f\|_2$ est une **norme sur l'espace $L^2(0,T)$**.

On a donc : $\|f\|_2^2 = (f,f) = \int_0^T |f(t)|^2 \, dt$

Quelques propriétés de la norme L^2 :

- La norme est positive : $\|f\|_2 \geq 0$.
- Si $\|f\|_2 = 0$, alors $f = 0$.
- Pour f et g dans l'espace $L^2(0,T)$, on a **l'inégalité triangulaire** : $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$.
- Pour f et g dans l'espace $L^2(0,T)$, on a **l'inégalité de Cauchy-Schwarz** : $|(f|g)| \leq \|f\|_2 \; \|g\|_2$.

f) Théorème de Pythagore

Si $(f|g) = 0$ alors $\|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$.

2- Inégalité de Bessel-Parseval

a) Proposition

Soit $f \in L^2(0,2\pi)$ une fonction 2π-périodique et soit $S_N f \in E_N$ (rappel : E_N est l'espace des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N) où $S_N f$ est la série de Fourier exponentielle de f avec $S_N f(t) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$.

On a alors les formules suivantes :

1. $\|S_N f\|_2^2 = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$ (preuve : se référer aux propriétés du produit scalaire et de la norme dans L^2)
2. $(f - S_N f \mid S_N f) = 0$ (preuve : se référer à l'ED 7 "Projecteur sur les polynômes trigonométriques")
3. $\|f\|_2^2 = \|f - S_N f\|_2^2 + \|S_N f\|_2^2$ (preuve : appliquer le théorème de Pythagore sur la propriété 2 ci-dessus)

a) Inégalité de Bessel-Parseval

Soit $f \in L^2(0,2\pi)$ une fonction 2π-périodique et soit $S_N f \in E_N$, alors, d'après la proposition ci-dessus, on a :

(2) $$\|S_N f\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \iff \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \; dt$$

Si f est une fonction à valeurs réelles, alors on utilise la série de Fourier trigonométrique $S_N f(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \Big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \Big)$ et dans ce cas l'inégalité de Bessel-Parseval est donnée par :

(3) $$a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n^2 + b_n^2 \Big) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 \; dt$$

3- Égalité de Parseval

Soit $f \in L^2(0,2\pi)$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux, alors $S_N f$ converge vers f en norme L^2, c'est à dire : $\|S_N f - f\|_2^2$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

Ainsi, $S_N f$ et f ont la même norme et on a l'égalité suivante :

(4) $$\|S_N f\|_2^2 = \|f\|_2^2 \iff \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \; dt$$

L'égalité de Parseval affirme donc que la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$ converge.

Si f est une fonction à valeurs réelles, alors on utilise la série de Fourier trigonométrique et dans ce cas l'égalité de Parseval prend la forme :

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\, dt \tag{5}$$

4- Retour sur la convergence des séries de Fourier

a- Convergence simple

Théorème de Dirichlet (rappel) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction **périodique** de période T, **continue par morceaux** (C^0 par morceaux) et **lisse par morceaux** (C^1 par morceaux) alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série de Fourier $S_N f(t)$ converge simplement, quand $N \to +\infty$, vers :

- $f(t)$ si f est continue en t.
- $\dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$ si f est discontinue en t.

b- Convergence normale et uniforme

Théorème : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction **périodique** de période T, **continue** et **lisse par morceaux** (C^1 par morceaux).

$\Longrightarrow$ Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série de Fourier $S_N f(t)$ converge normalement (et donc uniformément), vers $f(t)$ quand $N \to +\infty$.

Exercice 1 : Série de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, paire définie par :

$$f(x) = x, \quad x \in \ [0, \pi]$$

1. Représenter graphiquement la fonction f.
2. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f et en déduire la série de Fourier S_f de f.
3. Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de Fourier de f.
4. En déduire la valeur des séries $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

Exercice 2 : Démonstration du théorème sur la convergence normale

Soit f une fonction 2π-périodique de $L^2(0, 2\pi)$, continue et C^1 par morceaux.

On souhaite démontrer que la série de Fourier de f, $S_N f$, converge normalement vers f.

1. Démontrer l'assertion suivante : " Montrer la convergence normale de $S_N f$ est équivalent à montrer la convergence de la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ ", où c_n sont les coefficients exponentiels de la série de Fourier $S_N f$.
2. Exprimer les coefficients de Fourier complexes c_n en fonction des coefficients de Fourier c_n' de la dérivée de f.
3. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le résultat de la question ci-dessus, montrer que la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ converge.