MVA101 - ED7 - Séries de Fourier

Rappels de cours :

1- Motivations

- A quoi servent les séries de Fourier ? : Les séries de Fourier sont un outil fondamental dans l'étude des **fonctions périodiques**. En effet, la théorie des séries de Fourier permet de **décomposer toute fonction périodique en une somme de sinusoïdes**, c'est à dire en une somme de fonctions trigonométriques que l'on appelle polynôme trigonométrique. Cette décomposition passe par le calcul de ce que l'on appelle les coefficients de Fourier.
$\longrightarrow$ Ainsi, des opérations telles que la dérivation s'écrivent simplement en partant des coefficients de Fourier, et le calcul d'une fonction périodique solution d'une équation différentielle fonctionnelle peut se ramener à la construction des coefficients de Fourier correspondants.

- Applications : Les séries de Fourier se rencontrent dans la décomposition de signaux périodiques, dans l'étude des ondes cérébrales, des courants électriques (i.e. résolution d'équations différentielles associés aux circuits électriques), dans la synthèse sonore, le traitement d'images, etc ...

Exemple de décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier :

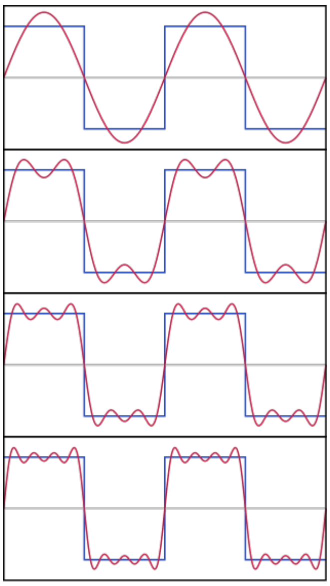

Figure 1: Les quatre premières sommes partielles de la série de Fourier pour un signal carré (ici on va jusqu'à $N = 4$). On voit ici que le signal périodique carré de fréquence f peut être obtenu en prenant une sinusoïde de fréquence fondamentale f (image 1) et en lui ajoutant des sinusoïdes dont les fréquences sont des multiples entiers de f (images 2, 3 et 4) *(source : wikipédia)*.

2- Les polynômes trigonométriques

a) Définition

Parmi les fonctions périodiques de période T on dispose de trois types de fonctions remarquables :
$\boldsymbol{\cos(n\omega t)}$, $\boldsymbol{\sin(n\omega t)}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\boldsymbol{e^{in\omega t}}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, où $\omega = 2\pi/T$ est la pulsation associée à T.
$\longrightarrow$ Ici on s'intéresse aux fonctions périodiques de période $T = 2\pi$. Donc $\omega = 1$.

Déf : On appelle **polynôme trigonométrique** toute fonction périodique de période 2π s'exprimant comme une combinaison linéaire des fonctions trigonométriques remarquables $\boldsymbol{\cos(nt)}$, $\boldsymbol{\sin(nt)}$ et $\boldsymbol{e^{int}}$.
Ainsi, on appelle polynôme trigonométrique <u>en cosinus et sinus</u>, toute fonction g de période 2π de la forme :

$$g(t) = \sum_{n=0}^{N} \Big(\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)\Big) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{N} \Big(\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)\Big) \tag{1}$$

et on appelle polynôme trigonométrique <u>en exponentielles</u>, toute fonction g de période 2π de la forme :

$$g(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} \gamma_n \; e^{int} \tag{2}$$

b) Calcul des coefficients $\boldsymbol{\alpha_n, \; \beta_n, \; \gamma_n}$

Il y a un cadre où l'on sait calculer les coefficients de telles décompositions, c'est celui de l'espace euclidien, avec un produit scalaire entre deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, noté $(x|y)$, et une base orthonormée $b_1, \cdots, b_n$.
En effet, l'expression du vecteur x dans cette base est : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$, avec $x_i \in \mathbb{R}$. Un calcul immédiat montre que les coefficients x_i du vecteur x sont donnés par $x_i = (x|b_i)$.

Exemple très simple : Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $x = (2, 4, -1)$. Soit b la base canonique de $\mathbb{R}^3$, c'est à dire $b = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$.
$\longrightarrow$ Alors on a bien $x = \sum_{i=1}^{3} x_i b_i$, en effet : $(2, 4, -1) = 2.(1, 0, 0) + 4.(0, 1, 0) - 1.(0, 0, 1)$.
$\longrightarrow$ Chaque composante x_i du vecteur x peut être retrouvée en calculant le produit scalaire euclidien $x_i = (x|b_i)$.
En effet $x_1 = 2 = (2, 4, -1).(1, 0, 0)$, $x_2 = 4 = (2, 4, -1).(0, 1, 0)$ et $x_3 = -1 = (2, 4, -1).(0, 0, 1)$.

C'est exactement la même chose dans le cas complexe. Dans ce cas, le produit scalaire est dit *hermicien* (au lieu d'euclidien). Le produit scalaire hermicien de deux fonctions g et h continues par morceaux de période T à valeurs complexes est alors défini par la formule suivante :

$$(g|h) = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \; \overline{h(t)} \; dt \tag{3}$$

auquel on associe une norme $\|g\|_2$ par la formule :

$$\|g\|_2 = (g|g) = \frac{1}{T} \int_0^T |g(t)|^2 \; dt \tag{4}$$

La proposition suivante est alors essentielle :
Proposition :

1. Les fonctions $e_n(t) := \boldsymbol{e^{int}}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ forment une **famille orthonormale** pour le produit scalaire ci-dessus.
   $\longrightarrow$ En effet $(e_p|e_q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ipt} e^{-iqt} \; dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it(p-q)} \; dt$. Ce produit scalaire est nul pour $p \neq q$ et est égal à 1 si $p = q$. Par définition, les fonctions e^{int} forment donc bien une famille orthonormale.
2. Les fonctions $\zeta_n(t) := \boldsymbol{\cos(nt)}$ et $\sigma_n(t) := \boldsymbol{\sin(nt)}$ pour $n \in \mathbb{N}$ forment une **famille orthogonale** pour le produit scalaire ci-dessus.
   $\longrightarrow$ En effet on a $(\zeta_p|\zeta_q) = (\sigma_p|\sigma_q) = 0$ pour $p \neq q$ et $(\zeta_0|\zeta_0) = 1$ et, pour $n \geq 1$, $(\zeta_n|\zeta_n) = (\sigma_n|\sigma_n) = 1/2$.

Ainsi, on construit les coefficients $\alpha_n, \; \beta_n, \; \gamma_n$ des expressions (1) et (2) grâce au résultat suivant :
Proposition :

1. Si g est un polynôme trigonométrique en cosinus et sinus, c.a.d $g(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{N} \Big(\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)\Big)$, alors on a les formules:

$$\alpha_0 = (g|\zeta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \; dt \tag{5}$$

et, pour $n \geq 1$, $\quad \alpha_n = (g|\zeta_n) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos(nt) \; dt, \qquad \beta_n = (g|\sigma_n) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin(nt) \; dt$

2. Si g est un polynôme trigonométrique en exponentielles, c.a.d $g(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} \gamma_n e^{int}$, alors on a les formules:

$$\gamma_n = (g|e_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)\ e^{-int}\ dt \tag{6}$$

3- Les séries de Fourier

a) Projecteur sur les polynômes trigonométriques

Soit f une fonction périodique de période 2π, continue par morceaux et de carré intégrable. Il n'y a aucune raison pour que f appartienne à l'espace E_N des polynômes trigonométriques. Or on souhaite pouvoir exprimer f comme la somme d'une série trigonométrique. La théorie des séries de Fourier consiste alors à projeter f de façon orthogonale sur l'espace E_N des polynômes trigonométriques (cf figure ci-dessous) :

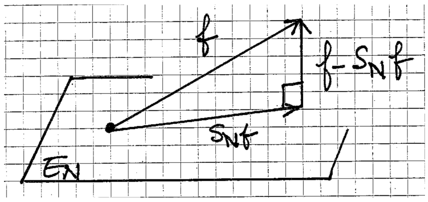

Figure 2: Projection orthogonale $S_N f$ de la fonction f sur l'espace des polynômes trigonométriques E_N. *(source : cours de François Dubois).*

On cherche donc $S_N f$ tel que :

1. $S_N f \in E_N$
2. $\forall g \in E_N, \quad (f - S_N f \mid g) = 0$

b) Définition

$S_N f$ est appelée **série de Fourier** de la fonction f et elle est définie par :

$$S_N f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \Big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \Big) \tag{7}$$

et avec les exponentielles complexes par:

$$S_N f(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} c_n\ e^{int} \tag{8}$$

c) Coefficients de Fourier

Les **coefficients de Fourier** de f sont alors les coefficients a_n, b_n et c_n. On les définit par les formules suivantes:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\ dt \tag{9}$$

$$\text{et, pour } n \geq 1, \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)\ dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)\ dt$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\ e^{-int}\ dt \tag{10}$$

Remarque : Dans les expressions ci-dessus on peut remplacer toutes les intégrales entre 0 et 2π par des intégrales entre $-\pi$ et π.

d) Relations entre les coefficients

- $a_0 = c_0$
- $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad \forall\, n \geq 1$
- $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad \forall\, n \geq 1$
- $a_n = c_n + c_{-n}, \quad \forall\, n \geq 1$
- $b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad \forall\, n \geq 1$

e) Parité

- (f paire) $\Longrightarrow (b_n = 0), \quad \forall\, n \geq 1$
- (f impaire) $\Longrightarrow (a_n = 0), \quad \forall\, n \geq 0$

4- Convergence des séries de Fourier

Le résultat suivant assure la convergence simple de la série de Fourier vers la fonction f, sauf aux points de discontinuité :

Théorème de Dirichlet : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique de période T, de classe C^1 par morceaux. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série de Fourier $S_N f(t)$ converge simplement vers $\dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$ quand N tend vers $+\infty$.

En d'autres mots :
- Si f est continue en t, la série $S_N f$ converge vers $f(t)$ (en effet dans ce cas on a $\dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \dfrac{2f(t)}{2} = f(t)$).
- Si f est discontinue en t, la série $S_N f$ converge vers $\dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$

Exercice 1 :

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = (x - \pi)^2, \quad x \in \ [0, 2\pi[$$

1. Représenter graphiquement la fonction f.
2. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f et en déduire la série de Fourier S_f de f.
3. Étudier la convergence simple de la série de Fourier de f.
4. En déduire la valeur des séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2 :

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in \ ]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si} \quad x \in \ [0, \pi] \end{cases}$$

1. Reprendre les 3 premières questions de l'exercice 1.
2. En déduire la valeur de la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.