le cnam

MVA101 - ED5 - Séries entières

Rappels de cours sur les séries de fonctions (cas général) :

- **Définition :** Comme pour les séries numériques, une **série de fonctions** $\sum f_n$ est définie comme $\sum f_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$.

- **Convergence normale :** C'est un type de convergence fournissant une condition suffisante pour montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions.

  Définition : On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ converge **normalement** si la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

  Rappel : $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in I}(|f_n(x)|)$.

  Exemple : La série de fonctions $\sum f_n$ définie par $f_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R} \quad x \mapsto x^n/n^2$ converge normalement sur $[0,1]$ car $\|f_n(x)\|_\infty = 1/n^2$ (terme général d'une série de Riemann convergente). Donc $\sum \|f_n\|_\infty$ converge et ainsi $\sum f_n$ converge normalement.

  Remarque : Il est équivalent de dire que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement s'il existe une série numérique à termes positifs $\sum a_n$ convergente telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I, \qquad \|f_n(x)\| \leq a_n$$

- **Théorème :** Une série de fonctions $\sum f_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui converge normalement sur I converge uniformément sur I :

$$\left(\sum f_n \quad \text{converge normalement}\right) \Longrightarrow \left(\sum f_n \quad \text{converge uniformément}\right)$$

Rappels de cours sur les séries entières :

- **Définition :** Une série entière est une série de fonctions $\left(\sum f_n\right)$ particulière dont le terme général est de la forme $f_n(x) = a_n x^n$, où a_n désigne une suite numérique réelle ou complexe et où $x \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

  Une **série entière** est donc notée : $\left(\sum a_n x^n\right)$

  $\longrightarrow$ On peut ainsi voir une série entière comme un polynôme de degré au plus infini.

- **Définition :** On appelle **domaine de convergence** de la série entière l'ensemble :

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \text{ tels que } : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{converge} \right\}$$

  On peut remarquer qu'une série entière converge pour $x = 0$, donc le domaine de convergence d'une série entière est non vide puisqu'il contient toujours $\{0\}$.

- **Lemme d'Abel :** Soit $(\sum a_n x^n)$ une série entière. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n x_0^n)$ soit bornée. Alors :

  1. $(\sum a_n x^n)$ converge **absolument** pour $|x| < |x_0|$.

2. $(\sum a_n x^n)$ converge absolument (même normalement) pour $|x| < r$ avec $0 < r < |x_0|$.

- **Rayon de convergence d'une série :**
Théorème : Soit $(\sum a_n x^n)$ une série entière, alors il existe un unique nombre réel $R \geq 0$ (éventuellement infini) tel que :

1. $(\sum a_n x^n)$ converge **absolument** si $|x| < R \iff x \in]-R, R[$
2. $(\sum a_n x^n)$ diverge si $|x| > R$.
3. la nature de la série $(\sum a_n x^n)$ ne peut pas être définie à priori si $|x| = R$ (il faut faire une étude).

Définition : On appelle ce nombre R le **rayon de convergence** de la série $(\sum a_n x^n)$. C'est un élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et il est défini par :

$$R = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \ \text{ tels que : } \left(\sum |a_n| r^n \right) \text{converge} \right\}$$

- **Détermination du rayon de convergence :**
Lemme d'Hadamard : Soit $(\sum a_n x^n)$ une série entière, alors le rayon de convergence R est donné par la relation suivante :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Démonstration : Posons $\ell = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. En utilisant la règle de d'Alembert on a :
$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = \ell |x|$. Ce qui implique :

1. $\left(\ell|x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{\ell} \right) \implies$ la série converge absolument
2. $\left(\ell|x| > 1 \iff |x| > \frac{1}{\ell} \right) \implies$ la série diverge

D'après le théorème ci-dessus, on a donc bien : $R = \dfrac{1}{\ell}$. Démonstration identique avec la règle de Cauchy.

- **Développement en séries entières :**
Définition : Soient $r > 0$ et f une fonction de $]-r, r[$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière sur $]-r, r[$ s'il existe une série entière $(\sum a_n x^n)$ convergente sur $]-r, r[$ telle que $f(x) = \sum a_n x^n$ pour tout $x \in]-r, r[$.

Quelques développements en séries entières usuels

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \forall\ |x| < 1, \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \quad \forall\ |x| < 1.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n, \quad \forall\ |x| < 1$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, x^n, \quad \forall\ x \in \mathbb{C}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!}\, x^{2n+1}, \quad \forall x \in \mathbb{C}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\, x^{2n}, \quad \forall x \in \mathbb{C}$$

- **Théorème de dérivabilité :**
Soit $(\sum a_n x^n)$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la fonction somme de cette série entière, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est dérivable sur $]-R, R[$ et sa dérivée a pour rayon de convergence R, et on a :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\ a_{n+1}\ x^n, \quad \forall\ x \in]-R, R[.$$

Exemple : C'est ainsi que l'on retrouve le développement en série entière de la fonction $\ln(1+x)$: En effet, la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ fournit par dérivation sur $]-1,1[$: $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$. Or $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ est une série géométrique de raison $-x$, donc $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ et donc $f(x) = \ln(1+x)$.

Exercice 1 :

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes et étudier, le cas échéant, la série quand $x = R$ et $x = -R$:

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2} x^n$
2. $\sum_{n=2}^{+\infty} 3^n \ln(n)\ x^{2n}$
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\ x^{2n+1}$
4. $\sum_{n=0}^{+\infty} n!\ x^n$
5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{3^n}\ x^n$
6. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}\ x^{3n}$ $(*)$

$(*)$: formule de Stirling : $n! = \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

Exercice 2 :

En utilisant des équivalences, déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(e^{-n}) x^n$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$.
   Indication : On pourra distinguer dans la démonstration les cas $|x| < 1$ et $|x| > 1$.
2. Étudier la convergence en $-R$ et en R.

Exercice 4 :

1. Calculer le rayon de convergence R et la somme de la série entière suivante : $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$
2. En déduire le rayon de convergence R et la somme des 2 séries entières suivantes :

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$ $\qquad$ (b) $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2}$

Exercice 5 :

En faisant une décomposition en éléments simples (cf rappel sur la feuille suivante), développer les fonctions suivantes en séries entières :

1. $f(x) = \frac{1}{(1-x)(2+x)}$, $\qquad$ 2. $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-2)^2(2x-1)}$

Rappels sur la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

On considère la fraction rationnelle $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, avec P et Q des polynômes.

Décomposition en éléments simples

Étape 1 : Écrire la fraction rationnelle sous sa forme irréductible = trouver la partie entière et le reste

Rappel : Un polynôme $P(x)$ peut se décomposer comme ceci (division euclidienne) :

$$P(x) = E(x)Q(x) + r(x),$$

avec Q le quotient, E la partie entière et r le reste dans la division euclidienne.

- Si degré $P <$ degré Q, alors la partie entière $E(x)$ est nulle.
- Si degré $P <$ degré Q, et si P et Q n'ont pas de racines communes, alors la fraction rationnelle $R(x) = P(x)/Q(x)$ est déjà sous sa forme irréductible.
- Si degré $P \geq$ degré Q, alors la forme irréductible de la fraction rationnelle $R(x)$ est la suivante :

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{r(x)}{Q(x)},$$

avec $E(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ et $r(x) = P(x) - E(x)Q(x)$.

Étape 2 : Décomposer en éléments simples

a) Calculer les pôles de la fraction rationnelle

Par définition, les pôles de $R(x)$ sont les racines de $Q(x)$. On les note a_i.

b) Écrire la décomposition en éléments simples

En notant m_i la multiplicité du pôle $a_i \in \mathbb{C}$, avec i variant de 1 à k avec degré $P = n = m_1 + m_2 + ... + m_k$, on peut écrire la fractions rationnelle $R(x)$ comme une décomposition en éléments simples :

$$\forall x \neq a_i \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \equiv E(x) + \sum_{i=1}^{i=k} \left(\frac{A_{i1}}{x - a_i} + \frac{A_{i2}}{(x-a_i)^2} + \frac{A_{i3}}{(x-a_i)^3} + ... + \frac{A_{im_i}}{(x-a_i)^{m_i}} \right)$$

c) Calculer les résidus A_i :

La méthode pour calculer les résidus A_i consiste à :

- Soit multiplier à gauche et à droite par $(x - a_i)$ et faire tendre x vers le pôle a_i.
- Soit, si $E(x) = 0$, multiplier à gauche et à droite par x et faire tendre x vers $+\infty$.
- Soit remplacer x par une valeur quelconque autre que a_i, (souvent $x = 0$).