le cnam

MVA101 - ED4 - Suites de fonctions

Rappels de cours :

- **Convergence simple :** Si pour chaque t appartenant à un intervalle I la suite de nombres réels $f_n(t)$ converge vers le nombre $f(t)$ quand n tend vers $+\infty$, alors on dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f.

  Avec des quantificateurs logiques, la convergence simple peut aussi être définie par:

  (1) $$\forall\epsilon > 0, \quad \forall \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{I}, \quad \exists \boldsymbol{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \qquad |f_n(t) - f(t)| < \epsilon$$

  "Pour toute mesure de l'erreur $\epsilon > 0$, **pour tout** t **dans** I**, il existe un rang** N entier tel que, pour tout entier n supérieur à N on a $|f_n(t) - f(t)| < \epsilon$."

  Exemple 1 : Soit la suite de fonctions $f_n(t) = \sin(t + \frac{1}{n})$. Pour t réel fixé, on a :
  $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin(t + \frac{1}{n}) = \sin(t)$. La suite de fonctions f_n converge donc simplement vers la fonction f, définie par $f(t) = \sin(t)$.

  Exemple 2 : Soit la suite de fonctions $h_n(t) = \exp(-n|t-2|)$. Pour t fixé et n tendant vers $+\infty$, la quantité $n|t-2|$ peut tendre vers $+\infty$ si $t \neq 2$ et elle vaut 0 si $t = 2$.
  La suite de fonctions h_n converge donc simplement vers la fonction h définie par:
  $$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t \neq 2 \\ 1 & \text{pour} \quad t = 2 \end{cases}$$

- **Convergence uniforme :** Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et soit f une fonction également définie sur I. Soit m_n la borne supérieure de la différence entre la fonction f_n et la fonction f sur l'intervalle I :
  $$m_n = \sup_{t\in I} |f_n(t) - f(t)|$$
  La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur l'intervalle I si et seulement si la suite de réels m_n tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

  Avec des quantificateurs logiques, la convergence uniforme peut aussi être définie par:

  (2) $$\forall\epsilon > 0, \quad \exists \boldsymbol{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{I}, \quad \forall n \geq N, \qquad |f_n(t) - f(t)| < \epsilon$$

  "Pour toute mesure de l'erreur $\epsilon > 0$, **il existe un rang** N **entier tel que, pour tout** t **dans** I et pour tout entier n supérieur à N on a $|f_n(t) - f(t)| < \epsilon$."

  Méthode pour évaluer m_n:
  - soit directement calculer le sup de la valeur absolue de $f_n(t) - f(t)$ sur I en faisant une étude de la fonction $f_n(t) - f(t)$.
  - soit chercher à majorer la valeur absolue $|f_n(t) - f(t)|$ par une expression ne faisant plus apparaître de "t" en sachant que $t \in I$.

  Exemple 1 : Reprenons la suite de fonctions $f_n(t) = \sin(t + \frac{1}{n})$ et calculons $m_n = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\sin(t + \frac{1}{n}) - \sin(t)|$:
  $|\sin(t + \frac{1}{n}) - \sin(t)| = |2\sin(\frac{1}{2n})\cos(t + \frac{1}{2n})| \leq 2\sin(\frac{1}{2n}) \leq \frac{1}{n}$.
  Donc $0 < m_n \leq \frac{1}{n}$, donc la convergence de $\sin(t + \frac{1}{n})$ vers $\sin(t)$ est uniforme sur $\mathbb{R}$.

- **Différence entre convergence simple et uniforme**
  - Étant donné $\epsilon > 0$, **le rang N** pour lequel $|f_n(t) - f(t)| < \epsilon$ pour tout $n \geq N$ **dépend de t pour la convergence <u>simple</u> et ne dépend pas de t pour la convergence <u>uniforme</u>**.
  - Lorsque les fonctions f_n sont définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la convergence uniforme de (f_n) vers f revient à dire que tout $\epsilon > 0$ il existe un rang à partir duquel le graphe de f_n est "coincé" entre le graphe de $f - \epsilon$ et celui de $f + \epsilon$.

- $\left((f_n) \text{ converge uniformément vers } f \right) \Longrightarrow \left((f_n) \text{ converge simplement vers } f \right)$.

- **Continuité de la limite uniforme** :
  Théorème: Si toutes les fonctions f_n sont continues sur I et si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur l'intervalle I, alors la fonction f est continue sur I.

  Ainsi (contraposée du théorème):

$$\left(\text{la limite } f \text{ de } (f_n) \text{ n'est pas continue} \right) \Longrightarrow \left((f_n) \text{ ne converge pas uniformément vers } f \right).$$

  <u>Exemple</u> : Reprenons la suite de fonctions (h_n) vue précédemment. On peut être sûr que la convergence de cette suite de fonctions vers la fonction h n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$. En effet $m_n = \sup_{t \in \mathbb{R}} |h_n(t) - h(t)| = 1$, m_n ne tend pas vers 0 lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

- **Intégration d'une suite de fonctions qui converge uniformément**
  Théorème: Soient deux réels $a < b$ et on suppose $I = [a, b]$. Si la suite de fonctions $f_n(t)$ converge uniformément vers la fonction f sur I, alors on peut "faire entrer la limite" dans l'intégrale et faire le passage à la limite dans l'intégrale :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\ dt = \int_a^b \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(t) \right) dt = \int_a^b f(t)\ dt \tag{3}$$

  <u>Attention</u> : Cette propriété peut ne pas être vérifiée si on intègre sur un intervalle non borné.

- **Dérivation d'une suite de fonctions dont les dérivées convergent uniformément**
  Théorème: Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur I. On suppose que :
  1. Pour tout n, f_n est dérivable sur I.
  2. Il existe $x_0 \in I$ tel que la suite $f_n(x_0)$ converge simplement.
  3. La suite (f'_n) converge uniformément sur I vers une fonction g.

  $\longrightarrow$ Alors la suite (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f vérifiant $f' = g$.

Exercice 1 : Convergence simple et uniforme

Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonction (f_n) suivantes :

1. $f_n \mapsto \mathbb{R} : \mathbb{R}$ définie $\forall n \geq 0$ par : $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$
2. $f_n \mapsto [0,1] : \mathbb{R}$ définie $\forall n \geq 1$ par : $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$

Exercice 2 : Convergence uniforme et dérivation

1. Soit $f_n \mapsto \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] : \mathbb{R}$ définie $\forall n \geq 1$ par : $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

   Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f dérivable et constater que la suite (f'_n) ne converge pas.

2. Soit $f_n \mapsto \mathbb{R} : \mathbb{R}$ définie $\forall n \geq 1$ par : $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$.

   Montrer que chaque f_n est dérivable mais que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas dérivable.

Exercice 3 : Convergence uniforme et intégration

Soit $f_n \mapsto [0,1] : \mathbb{R}$ définie $\forall n \geq 1$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{pour} \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Étudier la limite simple de la suite (f_n).
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, dt$. Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?