le cnam

MVA101 - ED3 - Séries numériques réelles et complexes

Rappels de cours :

- **Théorème fondamental :** La convergence absolue entraîne la convergence, c'est à dire :

$$\left(\sum |u_n| \quad \text{converge}\right) \Longrightarrow \left(\sum u_n \quad \text{converge}\right)$$

Attention ! : La réciproque est fausse ! Il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes. Par exemple, la série de terme général $u_n = (-1^n)\frac{1}{n}$:
- d'après le théorème sur les série alternées (voir ci-dessous) cette série converge
- mais $|u_n| = \frac{1}{n}$: on reconnaît le terme général de la série harmonique qui, on le sait, diverge.

- **Structure d'espace vectoriel pour l'ensemble des séries convergentes**.
Soient u_n et v_n les termes généraux de deux séries convergentes réelles (ou complexes). Alors :

  – la série de terme général $w_n = u_n + v_n$ est également convergente
  – si on multiple u_n par le nombre réel (ou complexe) fixé λ, alors la série de terme général $z_n = \lambda u_n$ est également convergente.

Conséquence : si u_n est le terme général d'une série convergente et v_n celui d'une série divergente, alors la somme $w_n = u_n + v_n$ est le terme général d'une série divergente.

- **Série semi-convergente**
Une série semi-convergente est une série convergente telle que la série $|u_n|$ des valeurs absolues diverge, c'est à dire :

$$\left(\sum u_n \quad \text{est une série semi-convergente}\right) \Longleftrightarrow \left(\sum u_n \quad \text{converge} \quad \textbf{et} \quad \sum |u_n| \quad \text{diverge}\right)$$

- **Série réelle alternée**:
On suppose que le terme général u_n de la série peut s'écrire sous la forme $u_n = (-1)^n a_n$, où a_n est une suite réelle positive, décroissante et tendant vers zéro quand n tend vers l'infini.

$\longrightarrow$ Alors la série de terme général u_n converge.

- **Transformation d'Abel (séries alternées généralisées)** :
On suppose que le terme général u_n de la série peut s'écrire sous la forme $u_n = a_n b_n$, avec les trois hypothèses suivantes :

  1. les sommes $B_n \equiv b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}$ restent bornées pour tout n,
  2. la suite a_n tend vers zéro si n tend vers l'infini,
  3. la série de terme général $v_n = a_n - a_{n-1}$ est absolument convergente.

$\longrightarrow$ Alors la série de terme général u_n converge.

Exercice 1

Soit $u_n = (-1)^n \dfrac{n^3}{n!}$.

1. On pose $v_n = \dfrac{n^3}{n!}$. Calculer v_2, v_3 et v_4. La suite (v_n) est-elle monotone ? Peut-on appliquer le théorème des séries alternées pour déterminer la nature de la série $\sum u_n$?
2. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2

Soit $u_n = \sin\left(\dfrac{n^2+1}{n}\pi\right)$.

1. Montrer que u_n peut s'écrire $u_n = (-1)^n \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.
2. En déduire la nature de la série de terme général u_n.
3. La série est-elle semi-convergence ?

Exercice 3

On considère la série numérique de terme général u_n pour $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$:

$$u_n = \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a}$$

1. Après avoir comparé les termes $\left(n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^b}$ et $\left(n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^a}$ pour $b \geq a$, montrer que si cette série est convergente pour une valeur a donnée alors elle est convergente pour tout $b \geq a$.
2. Montrer que si $a \leq 2$ la série est divergente. On pourra utiliser un développement limité de $\ln(u_n)$.
3. On pose $a = 2 + \epsilon$, avec $0 < \epsilon < 1$.
   (a) A partir d'un développement limité de $\ln(u_n)$, montrer que u_n est une suite équivalente à $\exp\left(-\frac{n^\epsilon}{6}\right)$.
   (b) Donner alors la limite de la suite $n^2 u_n$ quand n tend vers $+\infty$.
   (c) D'après la règle de Riemann donnée dans l'encadré ci-dessous, en déduire la nature de la série de terme général u_n.
4. Donner toutes les valeurs de a pour lesquelles cette série converge.

Règle de Riemann : Soit (u_n) une suite de réels positifs, et α un réel. On suppose que la suite $n^\alpha u_n$ tende vers le réel k, strictement positif. Alors,

- si $a > 1$, la série de terme général u_n converge,
- si $a < 1$, la série de terme général u_n diverge,
- si $a = 1$, on ne peut pas conclure.

Chloé Mimeau, 12 octobre 2016.