

Rappels de cours :

1 Définition d'une suite

Définition : Une **suite réelle** est un objet mathématique qui, à tout nombre entier naturel n associe un nombre réel : $(u_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto u_n$.

Le réel u_n est appelé **terme d'indice n** ou **terme de rang n** ou **nième terme** de la suite de la suite (u_n) .

Attention : (u_n) désigne la suite elle-même (analogie avec la fonction f), tandis que u_n (sans parenthèses) désigne le n ème terme de la suite.

2 Méthodes de génération d'une suite réelle

2.1 Par formule explicite

On peut définir une suite par une formule explicite du type $u_n = f(n)$. C'est-à-dire qu'il suffit, comme pour les fonctions, de faire le calcul de la valeur du terme u_n à n donné.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = 2n + 1$.

2.2 Par récurrence

Une suite définie par une relation liant u_{n+1} à u_n et un premier terme s'appelle une suite récurrente.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par : $u_{n+1} = u_n + 2$, avec $u_0 = 0$

3 Suites et ordres

Suite majorée

C'est une suite (u_n) pour laquelle on peut trouver un nombre réel fixe M , vérifiant : $u_n \leq M$, pour tout entier n supérieur à un certain rang n_0 (on notera PCR dans la suite pour "à Partir d'un Certain Rang").

Suite minorée

C'est une suite (u_n) pour laquelle on peut trouver un nombre réel fixe m , vérifiant : $u_n \geq m$, à PCR.

Suite bornée

C'est à la fois une suite majorée et minorée.

Une suite est bornée si et seulement si il existe un réel $M > 0$ tel que : $|u_n| \leq M$ à PCR.

Suite croissante (respect. strictement croissante)

C'est une suite (u_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ (respectivement $u_n < u_{n+1}$)

Suite décroissante (respect. strictement décroissante)

C'est une suite (u_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$ (respectivement $u_n > u_{n+1}$).

Suite monotone (respect. strictement monotone)

C'est une suite croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante).

4 Convergence d'une suite

4.1 Convergence vers une limite finie

Définition : On dit qu'un nombre réel fini ℓ est limite d'une suite numérique (u_n) , et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que, } \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On appelle suite **convergente** toute suite qui admet une limite finie.

Propriété : Toute suite convergente est bornée.

Attention : La réciproque n'est pas vraie ! Prenons par exemple la suite $u_n = \sin(n\pi)$. Cette suite est bornée (en effet, $\forall n \in \mathbb{N}, |\sin(n\pi)| \leq 1$), mais cette suite n'est pas convergente : elle oscille entre -1 et 1.

Propriété : Toute suite réelle croissante et majorée est convergente et toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.

Attention : La réciproque n'est pas vraie ! Prenons par exemple la suite $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Cette suite converge vers 0, mais elle n'est pas monotone (ni croissante ni décroissante).

4.2 Convergence vers une limite infinie

On dit qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$, et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que, } \forall n \geq n_0, u_n \geq A.$$

De même, une suite (u_n) a pour limite $-\infty$, et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, si et seulement si :

$$\forall A < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que, } \forall n \geq n_0, u_n \leq A.$$

Lorsqu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$, on dit qu'elle **diverge**.

5 Suites particulières

5.1 Suites arithmétiques

On appelle suite arithmétique toute suite pouvant s'écrire par récurrence comme :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + r && \text{(formulation par } \mathbf{récurrence}) \\ \text{ou } u_n &= u_0 + nr && \text{(formulation } \mathbf{explicite}) \end{aligned}$$

où r est appelée la raison de la suite arithmétique (u_n) .

Convergence d'une suite arithmétique :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= -\infty & \text{si } r < 0 \\ &= u_0 & \text{si } r = 0 \\ &= +\infty & \text{si } r > 0\end{aligned}$$

Somme des termes d'une suite arithmétique : On somme les n premiers termes de la suite et on obtient ainsi la somme :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2} = (\text{nombre de termes}) \times \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}.$$

5.2 Suites géométriques

On appelle suite géométrique toute suite pouvant s'écrire comme :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= u_n \times q & (\text{formulation par } \mathbf{r}\mathbf{e}\mathbf{c}\mathbf{u}\mathbf{r}\mathbf{r}\mathbf{e}\mathbf{n}\mathbf{c}\mathbf{e}) \\ \text{ou } u_n &= u_0 \times q^n & (\text{formulation } \mathbf{e}\mathbf{x}\mathbf{p}\mathbf{l}\mathbf{i}\mathbf{c}\mathbf{i}\mathbf{t}\mathbf{e})\end{aligned}$$

où q est appelée la raison de la suite géométrique (u_n) .

Convergence d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned}\text{si } q > 1, & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \\ \text{si } q = 1, & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0 \\ \text{si } |q| < 1, & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \\ \text{si } q \leq -1, & \quad \text{la suite diverge}\end{aligned}$$

Somme des termes d'une suite géométrique : On somme les n premiers termes de la suite et on obtient ainsi la somme :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de terme}}}{1 - \text{raison}}.$$

Exercice 1

La suite (u_n) est définie par $u_0 = -5$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{5}{2}$.

1. Quel type de suite est-ce ? Quelle est sa raison ?
2. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 .
3. Exprimer u_n en fonction de n .
4. Calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{18}$.
5. Quelle est la limite de u_n quand n tend vers l'infini ?

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = \frac{u_n}{3u_n + 1}$ avec $u_0 = 1$.

1. Calculer les termes u_1, u_2, u_3 et u_4 .
2. Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_n > 0$ et $u_n \leq 1$.

3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire sa nature (convergente ou divergente).
4. On définit une nouvelle suite (v_n) en posant $v_n = \frac{1}{u_n}$.
Exprimer la récurrence liant v_{n+1} à v_n . De quel type est la suite (v_n) ?
En déduire une expression du terme général de la suite (v_n) en fonction de n puis du terme général de la suite (u_n) .
Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
5. Montrer que pour $n > 0$: $u_n \geq \frac{1}{4n}$.

Exercice 3

Étudier les suites suivantes, et donner leur limite lorsqu'elles convergent :

1. $\frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{7\pi n}{2}\right)$
2. $\frac{e^n}{n^3}$
3. $\frac{3n+4}{9n+2}$
4. $\frac{(n+1)^3 - n^3}{n^2}$

Rappels de cours :

- Théorème des croissances comparées : Pour tous réels strictement positifs a et b :

$$\begin{aligned} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)^a}{x^b} = +\infty & \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^b e^{ax} = 0 \\ - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^b}{x^a} = 0 & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a |\ln(x)|^b = 0 \end{aligned}$$

Exercice 4

- Définition : Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si :
 - (u_n) est croissante
 - (v_n) est décroissante
 - $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$
- Théorème des suites adjacentes : Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes réelles, alors ces deux suites sont convergentes et ont la même limite réelle l . De plus, pour tout entier n , $u_n \leq l \leq v_n$.

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \\ v_n = u_n + \frac{1}{n!} \end{cases}$$

En utilisant les compléments de cours dans l'encadré ci-dessus, montrer que ces deux suites sont adjacentes. En déduire qu'elles sont convergentes et admettent la même limite.