MVA101 - ED 15 - Révisions : QCM et questions de cours

Analyse

1. V ou F : $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=9} \frac{1}{10^n} = 1.1111\cdots$

   vrai : série géométrique de raison $1/10$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=9} \frac{1}{10^n} = 1.\frac{1-(1/10)^n}{1-1/10} \sim \frac{1}{1-1/10} = 1.111\cdots$

2. V ou F : La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
   vrai : critère de d'Alembert

3. V ou F : La série $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$ converge.
   vrai : critère de Riemann avec $|\alpha| > 1$.

4. V ou F : Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ alors la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ converge.
   faux : c'est la série harmonique, elle correspond à une série de Riemann pour $\alpha = 1$ donc elle diverge. La condition $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ n'est qu'une condition nécessaire mais pas suffisante pour la convergence de la série $\sum u_n$.

5. V ou F : La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge vers 2.
   vrai : série géométrique de raison $a = 1/2$, donc elle converge vers $1/(1-a) = 2$

6. V ou F : La série $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge si $0 < \alpha < 1$.
   faux : d'après le critère sur les séries alternées $\sum(-1)^n a_n$, puisqu'ici $a_n = 1/n^\alpha$ est une suite réelle positive, décroissante (à montrer) et tendant vers 0 quand n tend vers l'infini, alors la série converge.

7. V ou F : Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{-nx}$ converge.
   faux : si $x < 0$, alors le terme général ne tend plus vers 0 quand n tend vers l'infini et donc le critère grossier de convergence n'est pas vérifié. La série ne converge donc que lorsque $x \geq 0$.

8. V ou F : Si elle converge, la série ci-dessus converge vers $\frac{e^x}{e^x-1}$.
   vrai : série géométrique de raison $a = e^{-x}$ donc elle vers converge vers $1/(1-a) = e^x/(e^x-1)$.

9. V ou F : La série de terme général $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$ converge.
   faux : le terme général ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini. En effet, si on factorise par n au numérateur et dénominateur, on a $u_n = \frac{2+(-1)^n/n}{5+(-1)^{n+1}/n}$ et donc $u_n \longrightarrow 2/5$.

10. V ou F : La série $\displaystyle\sum_{n>0} \ln(1+e^{-n})$ converge absolument.
    vrai : En effet, quand $n \to +\infty$, alors e^{-n} tend vers 0. On peut donc faire un DL de la fonction $\ln(1+X)$ au voisinage de $X = 0$ avec $X = e^{-n}$. Dans ce cas on a : $\ln(1+e^{-n}) \sim e^{-n}$. Or

$e^{-n} = (\frac{1}{e})^n$: c'est le terme général d'une série géométrique de raison a avec $a = \frac{1}{e}^n < 1$. Donc la série converge. De plus, comme c'est une série à termes positifs, elle converge absolument.

11. Soit f une fonction réelle continue sur $[0,1]$. On définit $\forall\, n \in \mathbb{N}$ la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+x}$ pour $x \in [0,+\infty[$. Alors la suite converge
☐ uniformément sur $[0,+\infty[$
☐ uniformément sur $[0,1]$ et la fonction limite $f(x)$ est continue
☐ uniformément sur $[0,+\infty[$ et la fonction limite $f(x)$ est continue
☐ uniformément sur tout compact de $]0,+\infty[$
Réponse : dernière proposition. En effet si $x \in [0,+\infty[$ la limite $f(x)$ de la suite de fonctions $f_n(x)$ n'est pas continue : elle vaut 1 quand $x = 0$ et 0 quand $x \in]0,+\infty[$. D'autre part, sur $]0,+\infty[$, on a : $|f_n(x) - f(x)| = \frac{e^{-nx}}{1+x} < e^{-nx} \to 0$. Donc on a bien convergence uniforme sur tout compact de $]0,+\infty[$.

12. Le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n$ vaut :
☐ $R = 1$ ☐ $R = +\infty$
☐ $R = 0$ ☐ $R = e^2$
Réponse : $R = +\infty$. En effet, $\ell = \lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim |\frac{\frac{n+1}{n!}}{\frac{n}{(n-1)!}}| = \lim |\frac{n+1}{n^2}| = 0$. Donc $R = \frac{1}{\ell} = +\infty$.

13. Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$, alors :
☐ $R = 1$ et $S(x) = \frac{1}{1-x}$ ☐ $R = +\infty$ et $S(x) = \frac{-1}{1-x}$
☐ $R = 1$ et $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ ☐ $R = 1$ et $S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$
Réponse : $R = 1$ et $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. Pour le rayon de convergence, utiliser d'Alembert et pour $S(x)$: $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Donc $\displaystyle\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \frac{1}{1-x}$, et ainsi : $\displaystyle S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$

14. Soit f une fonction périodique de période 2π. Les coefficients c_n de sa décomposition en série d'*exponentielles* s'écrivent :
☐ $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\exp(-i\omega t)\ dt$ ☐ $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\exp(-i\omega t)\ dt$
☐ $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)\exp(-i\omega t)\ dt$ ☐ $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\exp(-2i\pi\omega t)\ dt$
Réponse : $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\exp(-i\omega t)\ dt$ (cf cours)

15. V ou F : Soit f une fonction impaire sur son ensemble de définition, alors $f(-x) = f(x)$.
faux : f est impaire $\Longleftrightarrow f(-x) = -f(x)$

16. Soit f une fonction périodique de période 2π. Le coefficient a_0 de sa décomposition en série de *sinus-cosinus* s'écrit :
☐ $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(2\pi t)\ dt$ ☐ $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(2\pi t)\ dt$
☐ $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt$ ☐ $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\ dt$
Réponse : $\displaystyle a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt$ (ou encore : $\displaystyle a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\ dt$ (mais pas proposé))

17. V ou F : Soit f une fonction périodique impaire, alors tous les coefficients a_n $(n \geq 0)$, de sa décomposition en séries de *sinus-cosinus* sont nuls.
vrai

18. Soit f une fonction périodique de période 2π, paire, et égale à $f(x) = e^x$ sur $[0, \pi]$. Le coefficient a_0 de sa décomposition en série de *sinus-cosinus* est égal à :
$\square$ $a_0 = \frac{1}{\pi}(e^\pi - 1)$ $\square$ $a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{2\pi}-1}{e^\pi}\right)$ $\square$ $a_0 = \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1)$
Réponse : $a_0 = \frac{1}{\pi}(e^\pi - 1)$. Car la fonction f est paire, donc on calcule l'intégrale suivante : $a_0 = 2 \cdot \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^\pi e^t \, dt = \dfrac{1}{\pi}\left[e^t\right]_0^\pi = \dfrac{1}{\pi}(e^\pi - 1)$.

19. Pour une fonction f de carré intégrable, périodique et continue par morceaux, l'égalité de Parseval nous dit que :
$\square$ $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{N=0}^{N=+\infty} |c_n|^2$ $\square$ $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)| \, dt = \sum_{N=-\infty}^{N=+\infty} |c_n|^2$
$\square$ $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{N=-\infty}^{N=+\infty} |c_n|^2$ $\square$ $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)| \, dt = \sum_{N=-\infty}^{N=+\infty} |c_n|$
Réponse : $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{N=-\infty}^{N=+\infty} |c_n|^2$

20. Soit f une fonction définie sur un intervalle borné I de $\mathbb{R}$. Cette fonction sera dite $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I si elle est continue par morceaux et si :
$\square$ f est dérivable sur I sauf en un nombre fini de points et de dérivée $\mathcal{C}^0$ par morceaux.
$\square$ f est dérivable sur I
$\square$ f est dérivable sur I sauf en un nombre fini de points
Réponse : première proposition.

21. Soit f une fonction de période 2π et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, 2\pi]$. Alors on a :
$\square$ $\displaystyle\sum_{N=-\infty}^{N=+\infty} c_n e^{int} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\left[f(t_0^+) + f(t_0^-)\right], \quad \forall\, t_0 \in \mathbb{R}$
$\square$ $\displaystyle\sum_{N=-\infty}^{N=+\infty} c_n e^{int} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} f(t_0), \quad \forall\, t_0 \in \mathbb{R}.$
$\square$ Rien de particulier, il manque des hypothèses.
Réponse : première proposition (théorème de Dirichlet).

22. V ou F : Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, alors la dérivée de la transformée de Fourier de f est égale à la transformée de Fourier de f multipliée par $i\omega$.
faux : c'est la transformée de Fourier de la dérivée de f qui est égale à ça (ie : $\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f)(\omega)$). Là on a : $\dfrac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = -i\mathcal{F}(tf(t))(\omega)$).

Algèbre linéaire

1. Dans un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$:
$\square$ toute famille libre a au moins n éléments
$\square$ toute famille de n éléments est une base de E
$\square$ toute famille génératrice a au moins n éléments
$\square$ toute famille génératrice a au plus n éléments
Réponse : toute famille génératrice a au moins n éléments (3ème proposition)

2. V ou F : Si une famille $\{u, v, w\}$ d'éléments d'un espace vectoriel réel E est liée, alors au moins un des vecteurs u, v, w est une combinaison linéaire des autres.
vrai : définition du cours.

3. V ou F : La famille $\mathcal{F} = \{(3, 1, 4),\ (0, 2, 0),\ (2, 0, 6)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

vrai : Le déterminant $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ est non nul (il est égal à 20) donc la famille est libre. De plus la famille est constituée de 3 vecteurs. Or toute famille libre de 3 vecteurs est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. V ou F : L'application $f : (x, y) \mapsto (x + y, 2x - y)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$
vrai : Soit $u_1 = (x_1, y_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et soient λ, μ deux réels, on a bien : $f(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda f(u_1) + \mu f(u_2)$. (à démontrer)

5. Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Le noyau de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, est défini par :
☐ $\mathrm{Ker}(f) = \{v \in E, \text{ tels que } f(v) = 0\}$ ☐ $\mathrm{Ker}(f) = \{f(v) \text{ avec } v \in E\}$
☐ $\mathrm{Ker}(f) = \{v \in F, \text{ tels que } f(v) = 0\}$ ☐ $\mathrm{Ker}(f) = \{v \in E, \text{ tels que } f(v) \neq 0\}$
Réponse : $\mathrm{Ker}(f) = \{v \in E, \text{ tels que } f(v) = 0\}$

6. V ou F : La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.
faux : le déterminant $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ est égal à 12 (différent de 0) donc A est inversible.

7. V ou F : Soit A une matrice de taille (3×3) à coefficients réels. Alors A possède exactement n valeurs propres distinctes.
faux : 1er cas : le polynôme caractéristique peut ne pas avoir de solution dans $\mathbb{R}$. 2ème cas : le polynôme caractéristique peut avoir des racines de multiplicité supérieure à 1. Dans ce cas le nombre de valeurs propres distinctes est strictement inférieur à 3.

8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont :
☐ $\lambda = 1$ de multiplicité 1 et $\lambda = 2$ de multiplicité 2
☐ $\lambda = 1$ de multiplicité 1 et $\lambda = 2$ de multiplicité 1
☐ $\lambda = 1$ de multiplicité 2 et $\lambda = 2$ de multiplicité 1
☐ $\lambda = 1$ de multiplicité 2 et $\lambda = -2$ de multiplicité 1
Réponse : $\lambda = 1$ de multiplicité 2 et $\lambda = 2$ de multiplicité 1. En effet : $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1-\lambda & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & \mathbf{2-\lambda} \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2.$

9. V ou F : Sans calcul, on ne peut pas connaitre à priori la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$ pour la matrice A ci-dessus.
vrai : Comme la multiplicité de la valeur propre $\lambda = 1$ est égale à 2, la dimension du sous-espace propre associé peut être égale à 1 ou 2. Sans calcul, on ne peut pas le savoir à priori.

Chloé Mimeau, 18 janvier 2017.