MVA101 - ED 12 - Algèbre linéaire (2)

Rappels de cours :

6 - Écriture matricielle d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie respectives n et m et f une application linéaire de E dans F. Notons $\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_n)$ une base de l'espace de départ E et $\mathcal{C} = (c_1, \cdots, c_m)$ une base de l'espace d'arrivée F. Soit $a_{i,j}$ la ième coordonnée de $f(b_j)$. On a donc :

$$\forall\ j = 1, \cdots, n\ , \quad f(b_j) = a_{1,j}c_1 + \cdots + a_{i,j}c_i + \cdots + a_{m,j}c_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}c_i$$

Pour écrire la matrice de l'application linéaire f relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on considère :

- i l'indice des vecteurs de la base d'arrivée $\mathcal{C}$
- j l'indice des vecteurs de la base de départ $\mathcal{B}$

Ainsi, les coordonnées des vecteurs images $f(b_1), ..., f(b_n)$ sont conventionnellement notées en colonnes:

$$\begin{array}{ccccc|cc}
 & & \text{départ} & & & & \\
f(b_1) & \cdots & f(b_j) & \cdots & f(b_n) & & \\
\hline
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} & c_1 & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} & c_i & \text{arrivée} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} & c_m &
\end{array}$$

<u>Exemple</u> : Considérons l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$: $f : (x, y) \mapsto (x + y,\ 2x + 3y,\ x - y)$.

Munissons $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ de leur base canonique respective, c'est à dire qu'ici on a $\mathcal{B} = \big((1,0),\ (0,1)\big)$ et $\mathcal{C} = \big((1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\big)$. Les images des deux vecteurs de la base de départ $\mathcal{B}$ par f sont :

$$\begin{aligned} f((1,0)) &= (1,2,1) = \mathbf{1}(1,0,0) + \mathbf{2}(0,1,0) + \mathbf{1}(0,0,1), \\ f((0,1)) &= (1,3,-1) = \mathbf{1}(1,0,0) + \mathbf{3}(0,1,0) - \mathbf{1}(0,0,1) \end{aligned}$$

La matrice de f est donc la suivante (attention à l'écriture des vecteurs de l'espace d'arrivée, c'est à dire des vecteurs images, en **colonnes**):

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Définition :
- Soit f une application linéaire de matrice A_f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$,
- soit g une application linéaire de matrice A_g dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$,
$\longrightarrow$ alors la matrice de l'application linéaire $g \circ f$ (*composée de* f *par* g) est la matrice $A_{g \circ f}$ égale au produit matriciel $A_g A_f$. La matrice $A_{g \circ f}$ est écrite dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$.

7 - Produit matriciel

Le produit de deux matrices ne peut se définir que **si le nombre de colonnes de la première matrice est le même que le nombre de lignes de la deuxième matrice**, c'est-à-dire lorsqu'elles sont de tailles compatibles.

On dit qu'une matrice A est de taille (m,n) si elle a m lignes et n colonnes.

Si $A=(a_{ij})$ est une matrice de taille (m,n) et $B=(b_{ij})$ est une matrice de taille (n,p), alors leur produit, noté $AB=(c_{ij})$ est une matrice de taille (m,p) donnée par :

$$\forall i,j : c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \tag{1}$$

<u>Exemple</u> :

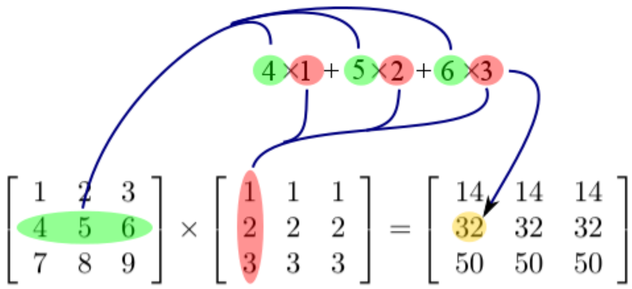

Figure 1: Produit d'une matrice A de taille $(3,3)$ pat une matrice B de taille $(3,3)$. Le résultat est une matrice C de taille $(3,3)$. *(source : openclassroom)*

<u>Remarque :</u> En algèbre linéaire :

- une matrice A de taille (m,n) représente une application linéaire f d'un espace de dimension n vers un espace de dimension m.
- une matrice colonne V de n lignes est une matrice de taille $(n,1)$ et représente un vecteur v d'un espace vectoriel de dimension n
- le produit matrice-vecteur AV représente l'image du vecteur v par l'application linéaire f, c'est à dire que : $AV=f(v)$.

8 - Matrice identité

Définition : On note I_n la matrice identité d'ordre n. C'est une matrice **carrée**, de taille (n,n), avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs. Ainsi :

$$I_1 = (1),\ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \cdots,\ I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

La matrice identité correspond à la matrice de l'**application identité**. Ainsi, la multiplication par une matrice identité n'a aucun effet sur une matrice donnée : si A est une matrice de taille (m,n) alors on a les égalités suivantes :

$$I_m A = A I_n = A \tag{3}$$

9 - Matrice inversible et matrice inverse

Définition : Une matrice carrée A d'ordre n (c'est à dire de taille (n,n)) est dite **inversible** s'il existe une matrice B d'ordre n, appelée **matrice inverse** de A et notée :

$$B = A^{-1}, \tag{4}$$

telle que :

$$AB = BA = I_n \tag{5}$$

où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

Une matrice carrée qui n'est pas inversible est dite **non inversible** ou **singulière**.

Le calcul de la matrice inverse d'une matrice A peut-être effectué en résolvant un système linéaire.

10 - Résolution d'un système linéaire avec la méthode de Gauss

Soit le problème matriciel linéaire suivant :

$$AX = B \tag{6}$$

avec $A = (a_{ij})$ une matrice (connue) de taille (m,n), $B = (b_j)$ un vecteur colonne (connu) de taille $(n,1)$ et X le vecteur colonne inconnu $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de taille $(n,1)$ dont on cherche les coefficients.

Par multiplication matricielle ce problème peut également s'écrire sous la forme d'un système linéaire:

$$AX = B \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_n \end{array} \right. \tag{7}$$

La **méthode Gauss** consiste à résoudre ce système linéaire en le transformant en un système linéaire équivalent de forme triangulaire, plus facile à résoudre.

Les opérations autorisées pour transformer ce système en système triangulaire sont :
- échange de deux lignes
- multiplication d'une ligne par un nombre non nul.
- addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne.

Exemple :

$$AX = B \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 2z & = & 2 & & L_1 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & -1 & & L_2 \\ 3x & + & 5y & + & 8z & = & 8 & & L_3 \end{array} \right.$$

On garde la ligne L_1 inchangée. On dit qu'elle sert de **pivot** pour éliminer l'inconnue x des autres lignes (c'est à dire remplir la première colonne du système par des 0 sous la première ligne). Pour cela, on retire L_1 à L_2, et on retranche 3 fois L_1 à L_3. On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} x & + & 2y & + & 2z & = & 2 & L_1 \\ & & y & - & 4z & = & -3 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & -y & + & 2z & = 2 & & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \right.$$

C'est maintenant la ligne L_2 qui sert de pivot pour éliminer y de la troisième ligne. Pour cela, on remplace la ligne L_3 par $L_3 + L_2$. On trouve :

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} x & + & 2y & + & 2z & = & 2 & L_1 \\ & & y & - & 4z & = & -3 & L_2 \\ & & & & -2z & = -1 & & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \right.$$

Ce dernier système, triangulaire, est facile à résoudre. Il suffit d'effectuer la "remontée" en remplaçant z par sa valeur $z = 1/2$ dans la ligne L_2. On trouve alors $y = -1$. Enfin, dans la ligne L_1 on trouve $x = 3$.

La solution du système linéaire est donc $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Exercice 1 : Écriture matricielle d'une application linéaire

On considère les applications linéaires f et g suivantes :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad\qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (2x - y, y - z) \qquad\qquad (x, y) \mapsto (x + y, x - y, 2x + 3y)$$

En considérant les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:

1. déterminer la matrice de f.
2. déterminer la matrice de g.
3. déterminer la matrice de la composée $g \circ f$.
4. déterminer la matrice de la composée $f \circ g$.

Exercice 2 : Résolution de système linéaire (méthode de Gauss)

1. Résoudre le système linéaire : $\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 1 \end{array} \right.$
2. Expliciter les solutions du système linéaire, on discutera selon la valeur du paramètre m : $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & mz & = & 0 \\ x & + & my & - & 2z & = & 0 \end{array} \right.$
3. La famille de vecteurs $\big((1, 4, 7), (2, 5, 8), (3, 6, 0)\big)$ est-elle une famille libre ?