MVA101 - ED 11 - Algèbre linéaire (1)

Rappels de cours :

1 - Espaces vectoriels

Définition : On dit que E est un *espace vectoriel* sur $\mathbb{R}$ si E est muni d'une addition interne et d'une multiplication externe :

- Addition interne :
  $E \times E \to E$
  $(u, v) \mapsto u + v$

- Multiplication externe :
  $\mathbb{R} \times E \to E$
  $(\lambda, u) \mapsto \lambda u$

Définition : Soient $u_1, \cdots, u_n$ n vecteurs d'un espace vectoriel E et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels. On appelle *combinaison linéaire* de $u_1, \cdots, u_n$, tout vecteur s'écrivant :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots \lambda_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \tag{1}$$

Définition : On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E si et seulement si :

- F est un sous-ensemble de E, c'est à dire $F \subset E$.
- F contient le vecteur nul, c'est à dire $\{0\} \in F$.
- F est stable par combinaisons linéaires, c'est à dire :

$$\forall\ u_1, \cdots, u_n \in F, \quad \forall\ \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in F$$

2 - Familles de vecteurs

Définition : On appelle *famille* finie de vecteurs un n-uplet de vecteurs : $\mathcal{F} = (u_1, \cdots, u_n)$.

Définition : L'espace vectoriel *engendré* par F est l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, \cdots, u_n$:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} \tag{2}$$

<u>Exemples</u> :

- Pour $n = 1$: L'espace vectoriel engendré par un seul vecteur u (non nul) est la droite vectorielle : $\{\lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$
- Pour $n = 2$: L'espace vectoriel engendré par deux vecteurs u et v (non colinéaires) est le plan vectoriel : $\{\lambda u + \mu v, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est engendré par les n vecteurs : $(1, 0, \cdots, 0), (0, 1, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, 1)$. En effet, on peut écrire tout vecteur $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ comme la combinaison linéaire : $x_1(1, 0, \cdots, 0) + x_2(0, 1, \cdots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \cdots, 1)$.

Remarque : Deux familles de vecteurs différentes peuvent engendrer le même espace vectoriel. Par exemple, $\mathbb{R}^2$ peut être engendré par :

- $\mathcal{F} = \big((1,0),\ (0,1)\big)$.
  En effet, comme dit précédemment tout vecteur (x,y) de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire $(x,y) = x(1,0)+y(0,1)$.
- $\mathcal{G} = \big((1,1),\ (1,-1)\big)$.
  En effet, tout vecteur (x,y) de $\mathbb{R}^2$ peut aussi s'écrire $(x,y) = \dfrac{x+y}{2}(1,1) + \dfrac{x-y}{2}(1,-1)$.

Définition : Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une famille d'éléments de E. On dit que $\mathcal{F}$ est une *famille génératrice* de E si l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$ est égal à E.

Exemple : Les familles $\mathcal{F} = \big((1,0),\ (0,1)\big)$ et $\mathcal{G} = \big((1,1),\ (1,-1)\big)$ sont deux exemples de familles génératrices de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
Par contre, la famille $\big((0,1),\ (0,2)\big)$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ (en effet, on ne pourra jamais obtenir tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ par combinaison linéaire de ces deux vecteurs là, par exemple on ne peut jamais avoir le vecteur $(1,0)$).

Les trois familles suivantes sont aussi des familles génératrices de $\mathbb{R}^2$:

$$\big((1,0),\ (0,1),\ (1,1)\big); \qquad \big((1,1),\ (1,-1),\ (0,1)\big); \qquad \big((1,0),\ (0,1),\ (1,1),\ (1,-1)\big)$$

Par rapport à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, elles contiennent des vecteurs superflus. Si dans une famille de vecteurs, un vecteur est combinaison linéaire des autres, on peut l'enlever de la famille sans changer l'espace engendré. Une famille de laquelle on ne peut enlever aucun vecteur sans changer l'espace engendré est une famille libre.

Définition : Soit $\mathcal{F} = (u_1, \cdots, u_n)$ une famille finie de vecteurs de l'espace E. On dit que $\mathcal{F}$ est une *famille libre* de E si pour tous $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_i = 0,\ \forall\ i = 1, \cdots n \tag{3}$$

La famille est dite *liée* dans le cas contraire.
Exemples : Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\big((0,1),\ (0,2)\big)$ est liée (le deuxième vecteur est égal à 2 fois le premier).
A l'inverse, les familles $\mathcal{F} = \big((1,0),\ (0,1)\big)$ et $\mathcal{G} = \big((1,1),\ (1,-1)\big)$ sont deux familles libres de $\mathbb{R}^2$.

3 - Bases

Définition : On appelle *base* toute famille de vecteur à la fois génératrice et libre.
Exemples : Les familles $\mathcal{F} = \big((1,0),\ (0,1)\big)$ et $\mathcal{G} = \big((1,1),\ (1,-1)\big)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$.
Dans $\mathbb{R}^n$, la famille $\big((1,0,\cdots,0),\ (0,1,\cdots,0), \cdots,\ (0,0,\cdots,1)\big)$ est une base, que l'on appelle la *base canonique*.

Définition : Soit E un espace vectoriel différent de $\{0\}$ et finiment engendré. On appelle *dimension* de E le nombre d'éléments commun à toute base de E.

Théorème : Dans un espace vectoriel E de dimension n :

1. toute famille libre a au plus n éléments
2. toute famille libre de n éléments est une base de E

3. toute famille génératrice a au moins n éléments
4. toute famille génératrice de n éléments est une base de E

Théorème : Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_n)$ une base de E. Pour tout vecteur $u \in E$, il existe un n-uplet de réels $(x_1, \cdots, x_n)$ *unique*, tel que :

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \tag{4}$$

Le n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ correspond alors aux *coordonnées* du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$ de E.

4 - Applications linéaires

Définition : Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application de E dans F. On dit que f est une *application linéaire* si et seulement si :

$$\forall\ u, v \in E, \quad \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v) \tag{5}$$

Si $E = F$, l'application linéaire f est alors appelée *endomorphisme*.

Théorème : La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

5 - Image et noyau

Définition : Soient E et F deux espaces vectoriels et f una application linéaire de E dans F. On appelle :

1. *Image de* f et on note $\mathrm{Im}(f)$ le sous-espace vectoriel de F :

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{f(u),\ u \in E\} \tag{6}$$

2. *Noyau de* f et on note $\mathrm{Ker}(f)$ le sous-espace vectoriel de E :

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{u \in E \text{ tels que } f(u) = 0\} \tag{7}$$

Exemples : Considérons l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f : (x, y) \mapsto (x + y, x + y, x + y)$$

L'image de f est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(1, 1, 1)$. Et son noyau est l'ensemble des vecteurs (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $(x + y, x + y, x + y) = (0, 0, 0)$, c'est à dire : $x + y = 0 \Longleftrightarrow y = -x$: c'est donc la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par le vecteur $(1, -1)$. Ainsi on a :

$$\mathrm{Im}(f) = \{\ \lambda(1, 1, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(f) = \{\ \lambda(1, -1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Proposition : Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de l'espace vectoriel E. L'application f est :

- *surjective* si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F \Longleftrightarrow \{f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)\}$ engendre F
- *injective* si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\} \Longleftrightarrow \{f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)\}$ est une famille libre de F
- *bijective* si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$ **et** $\mathrm{Ker}(f) = \{0\} \Longleftrightarrow \{f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)\}$ est une base de F.

Exercice :

On considère les applications suivantes :

- a)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (-x, -y) \end{aligned}$$

- b)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

- c)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y) \end{aligned}$$

- d)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y + z, -x + 2y + 2z) \end{aligned}$$

Pour chacune de ces applications :

1. Vérifier que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. L'application f est-elle bijective ?