le cnam

MVA101 - ED 10 - Transformation de Fourier (2)

Rappels de cours :

2- Transformation de Fourier (suite)

g) Dérivée de la transformée de Fourier

Théorème : Si les fonctions f et $tf(t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, (c.a.d f et $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$, c.a.d $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t|f(t)|\, dt < \infty$), alors la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est dérivable (c'est à dire $\widehat{f}$ est de classe C^1) et on a:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\widehat{f}(\omega) = -\mathrm{i}\ \mathcal{F}(tf(t))(\omega)} \tag{1}$$

Preuve : Posons $g(t,\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}f(t)$, et calculons : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}g(t,\omega) = -\mathrm{i}t\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}f(t)$.

Cette dérivée est continue pour tout t et de plus $\left|\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\omega}\right|$ est une fonction intégrable (car $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$). Les hypothèses du théorème de la dérivation sous le signe de l'intégrale sont donc vérifiées, et nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\widehat{f}(\omega) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)\, dt = -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}(tf(t))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, dt = -\mathrm{i}\ \mathcal{F}(tf(t))(\omega)$$

h) Transformée de Fourier de la dérivée

Si f est intégrable et dérivable (c'est à dire si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et f est de classe C^1) et si la fonction dérivée f' appartient aussi à $L^1(\mathbb{R})$ (c'est à dire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|\, dt < \infty$), alors :

$$\boxed{\mathcal{F}(f'(t))(\omega) = \mathrm{i}\omega\ \mathcal{F}(f(t))(\omega)} \tag{2}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\widehat{f'}(\omega) = i\omega\widehat{f}(\omega)} \tag{3}$$

Preuve rapide : Fixons M_1 et M_2 deux réels positifs. On a alors :

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = \lim_{M_1\to-\infty, M_2\to-+\infty}\int_{M_1}^{M_2} f'(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

Or en faisant une intégration par parties on a que :

$$\int_{M_1}^{M_2} f'(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega M_2}f(M_2) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega M_1}f(M_1) + \mathrm{i}\omega\int_{M_1}^{M_2} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

Or les deux premiers termes du membre de droite tendent vers 0 quand M_1 et M_2 tendent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$. Donc :

$$\lim_{M_1\to-\infty, M_2\to-+\infty}\int_{M_1}^{M_2} f'(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \lim_{M_1\to-\infty, M_2\to-+\infty}\mathrm{i}\omega\int_{M_1}^{M_2} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

C'est à dire :

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = \mathrm{i}\omega\mathcal{F}(f)(\omega)$$

i) Transformation de Fourier inverse

Définition : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformation de Fourier inverse $\overline{\mathcal{F}}$ par la relation :

(4) $$\boxed{\overline{\mathcal{F}}(f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\ d\omega = \mathcal{F}(f)(-t)}$$

Tout comme la transformée de Fourier $\mathcal{F}$, la transformation de Fourier inverse $\overline{\mathcal{F}}$ est un opérateur <u>linéaire</u>.

Ainsi, si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors on peut obtenir $f(t)$ à partir de $\widehat{f}(\omega)$ par la transformation de Fourier inverse :

(5) $$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f) = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\ d\omega}$$

j) Produit de convolution

Définition : Soient deux fonctions f et g telles que $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors le produit de convolution $f \star g$ est une intégrale convergente (c.a.d finie) définie par :

(6) $$\boxed{(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)\ du}$$

k) Transformée de Fourier d'un produit de convolution

Théorème : Lors d'une transformation de Fourier, un produit de convolution est changé en un produit ordinaire:

(7) $$\boxed{\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f)\ \mathcal{F}(g)}$$

Il existe le résultat analogue pour la transformation de Fourier inverse :

(8) $$\boxed{\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f} \star \widehat{g}) = 2\pi\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f})\ \overline{\mathcal{F}}(\widehat{g})}$$

Preuve du théorème (équation 7) : Calculons la transformée de Fourier du produit de convolution $f \star g$ (il s'agit de l'intégrale d'une intégrale, c'est à dire d'une intégrale double) :

$$\mathcal{F}(f \star g) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\ du\ dt$$

Effectuons le changement de variables $v = t - u$, $dv = dt$ dans l'intégrale ci-dessus. On obtient alors :

$$\mathcal{F}(f \star g) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(v+u)}\ du\ dv$$

Grâce au théorème de Fubini, on a que l'intégrale double ci-dessus est le produit (ordinaire) de deux intégrales simples :

$$\mathcal{F}(f \star g) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega u}\ du\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v}\ dv\right)$$

Ce qui donne :

$$\mathcal{F}(f \star g) = \widehat{f}(\omega)\ \widehat{g}(\omega) = \mathcal{F}(f)\ \mathcal{F}(g)$$

Exercice 1 : Transformation de Fourier inverse

Soit $\mathbb{1}_{[a,b]}$ la fonction définie par :

$$\mathbb{1}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $\mathbb{1}_{[-T,T]}$, où $T \in \mathbb{R}$.
2. D'après le résultat de la question précédente et en utilisant la transformation de Fourier inverse, montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ a pour transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right)(\omega) = \pi \mathbb{1}_{[-1,1]}.$$

Exercice 2 : Résolution d'une EDO à l'aide de la transformation de Fourier

On considère le système constitué d'un générateur basse fréquence fournissant une tension d'entrée $x(t)$, d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C. Le signal de sortie que l'on étudie est la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur. On rappelle que la charge q du condensateur est définie par $q(t) = Cv(t)$ et que l'intensité dans le circuit est donnée par $i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t)$. D'autre part, les tensions vérifient l'égalité :

$$x(t) = v(t) + Ri(t)$$

1. Donner l'équation différentielle ordinaire (EDO) vérifiée par $v(t)$.
2. En supposant que $\mathrm{e}^{\frac{t}{RC}}x(t)$ est intégrable sur $]-\infty, t]$, on montre par une méthode de résolution classique d'EDO que la solution $v(t)$ est égale à :

$$v(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{\frac{u}{RC}}x(u)\ \mathrm{d}u,$$

ce qui, après avoir fait passer l'exponentielle sur t sous le signe intégrale et après avoir effectué le changement de variable $y = t - u \iff \mathrm{d}y = -\mathrm{d}u$, nous donne :

$$v(t) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{\frac{-y}{RC}}U(y)}_{h(y)}\,x(t-y)\ \mathrm{d}y \qquad (\star)$$

On reconnaît l'expression du produit de convolution entre la fonction x (l'excitation du système) et h (la réponse impulsionnelle du système) :

$$h(t) = \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}}U(t), \qquad \text{avec} \qquad U(t) = \mathbb{1}_{[0,+\infty]}(t)$$

Le but est de retrouver ce résultat grâce à la transformation de Fourier.

(a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}U(t)$.

(b) A partir des deux questions précédentes, retrouver l'expression $(\star)$ de la solution $v(t)$ en utilisant la transformation de Fourier.