le cnam

École Siti, Dpt Imath, Case 2D500

Année universitaire 2013/2014
Examen session 1
Date: 8 février 2014

Sujet UE MVA005HT.
Sujet de 2 pages.
Responsable: T. Horsin

Les calculatrices sont **interdites**, tous documents manuscrits autorisés. Les téléphones mobiles et autres équipements communicants doivent être éteints et rangés dans les sacs pendant toute la durée de l'épreuve. Vérifiez que vous disposez bien de la totalité des pages du sujet en début d'épreuve et signalez tout problème de reprographie le cas échéant.

Exercice 1.

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(|x+2|)}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

i. Déterminer le domaine de définition de f.

ii. Calculer $\lim_{x \to -2^+} f(x)$ et $\lim_{x \to -2^-} f(x)$. f est-elle continue en $x = -2$?

iii. Calculer $\lim_{x \to -2^+} \dfrac{\sin(x+2) - (x+2)}{(x+2)^2}$. *On pourra, sans obligation, poser $X = x+2$ et se ramener en 0^+, et utiliser le développement limité de* $\sin$ *en* 0 *à un ordre au plus égal à* 3.

iv. Montrer que sur $]-2, +\infty[$, f est dérivable et que $f'(x)$ est du signe de
$$(x+2)\cos(x+2) - \sin(x+2).$$

v. Soit h la fonction donnée sur $]-2, +\infty[$ par $h(x) = (x+2)\cos(x+2) - \sin(x+2)$. Montrer que les variations de h sont données par le signe de $-(x+2)\sin(x+2)$.

vi. Montrer que $\lim_{x \to -2^+} f'(x) = 0$.

vii. Que vaut $h(-2 + 3\pi/2)$? En déduire que f décroît d'abord sur $]-2, +\infty[$ puis recroît jusqu'à au moins $-2 + 3\pi/2$.

Exercice 2.

Calculer les intégrales suivantes:

i. $\int\limits_1^e \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt$. On pourra poser $t = u^2$.

ii. $\int\limits_1^2 \frac{x+1}{x+2}dx$.

iii. $\int\limits_{-4}^{-3} \frac{dx}{x^2+8x+17}$.

iv. $\int\limits_0^1 \frac{x^2+x}{1+x^2}dx$. On pourra écrire $\frac{x^2+x}{1+x^2} = 1 + \frac{x-1}{x^2+1}$.

`Exercice 3.`

La qestion v exercice est hors barême. La traiter n'est pas nécessaire pour obtenir la note maximale.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 1}$ la suite définie par $v_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq 1, v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 1$.

i. Déterminer $l \in \mathbb{R}$ pour que $l = \frac{1}{2}l + 1$.

ii. Montrer que la suite (w_n) donnée par $\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq 1,\, w_n = v_n - l$ est une suite géométrique.

iii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N},\, n \geq 1, v_n = l + \frac{1}{2^{n-1}}(v_1 - l)$ et que $\lim v_n = l$.

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 1}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq 1,\, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{n+1}$.

iv. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq 1, u_n \leq v_n$.

v. (Question hors barême) Montrer que (u_n) est une suite convergente et que $\lim u_n = 0$.

`Exercice 4.`

Résoudre le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} f'(x) - f(x) = e^x \sin(x),\ x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 2. \end{cases}$$