le cnam
École Siti, Dpt Imath, Case 2D500

Année universitaire 2013/2014
Examen session 1
Date: 2 février 2014

Sujet UE MVA101HT.
Sujet de 3 pages.
Responsable: T. Horsin
Calculatrices interdites.
Tous documents manuscrits autorisés.
Les téléphones mobiles et autres équipements communicants doivent être éteints et rangés dans les sacs pendant toute la durée de l'épreuve.
Vérifiez que vous disposez bien de la totalité des pages du sujet en début d'épreuve et signalez tout problème de reprographie le cas échéant.

**Exercice 1.**

Les séries suivantes sont-elles convergentes ? (Justifier votre réponse).

i. $u_n = \dfrac{1}{n - \dfrac{1}{2n}}$.

ii. $u_n = \sin(\dfrac{1}{n^2})$.

iii. $u_n = \sin(\dfrac{(-1)^n}{n})$.

iv. $u_n = a^n n!$, pour $a > 0$, (on pourra utiliser la règle de D'Alembert et montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{an} = e^{-a} \quad ).$$

**Exercice 2.**

Déterminer le rayon de convergence $R$ des séries entières suivantes $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour chacun des cas:

i. $a_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n}$.

ii. $a_n = \frac{1}{n^{3n}}$

iii. $a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ impair,} \\ \left(\frac{4n+6}{n+2}\right)^n \text{ si } n \text{ pair.} \end{cases}$

**Exercice 3.**

On considère $f$ une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ qui satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 f''(x) + x(x+1)f'(x) - f(x) = 0$$

On admet que $f$ est développable en série entière.
Déterminer le développement en série entière de $f$, et donner son rayon de convergence.

**Exercice 4.**

Dans cet exercice la question i n'est pas utile pour les questions suivantes.
Soit $A$ la matrice donnée par $A := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$.

i. Déterminer les valeurs propres de $A$ et les vecteurs propres associés.

ii. On considère 2 fonctions $x$ et $y$ dérivables sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ \begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = -3x(t) - 3y(t), \\ x(0) = 1 \\ y(0) = -1. \end{cases} \tag{1}$$

On note $X$ et $Y$ les transformées de Laplace de $x$ et $y$. Déterminer le système d'équations vérifiées par $X$ et $Y$.

iii. Déterminer $X$ et $Y$, et en déduire $x$ et $y$.

**Exercice 5.**

Soit $f$ la fonction paire et $2\pi$ périodique telle que $f(x) = x$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et 0 sinon.

i. Déterminer la série de Fourier de $f$. On utilisera les $(a_n)$ et les $(b_n)$.

ii. Ecrire la relation de Bessel-Parseval pour $f$.

iii. La série de Fourier de $f$ converge-t-elle uniformément ? Si oui, la limite est-elle continue ?

iv. Quelle est la somme de la série de Fourier de $f$ en $x = \frac{9\pi}{2}$ ?