

Septembre 2012, deuxième session d'examen. Durée: 3h

Tous documents autorisés, calculatrices interdites.

Le barème, donné à titre indicatif, pourra être modifié.

Exercice 1.

On considère le triangle T dont les trois sommets sont les points de coordonnées respectives $(-1,0)$, $(1,0)$ et $(\frac{1}{2}, 1)$. Calculer

$$\int_T \sin(x) \sin(y) dx dy.$$

On rappelle que $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$.

Exercice 2. Calculer l'aire de la zone entourée par la courbe paramétrée $(x(t), y(t)) = (\sin(t), \sin(2t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 3. On considère la courbe paramétrée P donnée pour $t \in [0, 2\pi]$ par

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}(t - 1)^2. \end{cases}$$

i. Montrer que la longueur de P entre les instants 0 et 1 est donnée par

$$\int_0^1 \sqrt{1 + 3(t - 1)^2} dt.$$

ii. Calculer l'intégrale précédente. On pourra poser $t = 1 + \frac{e^u - e^{-u}}{2\sqrt{3}} = 1 + \frac{\text{sh}(u)}{\sqrt{3}}$.

Exercice 4. Soit, pour un nombre b réel, la matrice A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & b & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

i. Pour quelle(s) valeur(s) de b la matrice A représente-t-elle une application linéaire non injective ?

ii. Trouver les valeurs de b pour lesquelles 2 est valeur propre de A ?

iii. Peut-on choisir b pour que A représente une application linéaire dont l'image contienne le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

iv. Déterminer le noyau et le rang de A lorsque $b = \frac{34}{12}$.