Avril 2013, 2ème session d'examen. Durée: 3h
Tous documents autorisés, calculatrices interdites.
Le barême, donné à titre indicatif, pourra être modifié.

Exercice 1. (2 points)
Quelle est la nature de la série de terme générale (u_n) dans les cas suivants:

i. $u_n = (1-1/n)^{\sqrt{n}}$.

ii. $u_n = \dfrac{1}{2+(-1)^n\sqrt{n}}$

Exercice 2. (2 points)
Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes:

i. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avec $a_n = e^n$ si n est pair et $a_n = (1+1/n)^{n^2}$ si n est impair.

ii. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{3n+1}$.

Exercice 3. (4 points)
On considère f une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ qui satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 f''(x) + 4xf'(x) + (2-x^2)f(x) - 1 = 0$$

On admet que f est développable en série entière.
Déterminer le développement en série entière de f, et donner son rayon de convergence.

Exercice 4. (6 points)
Dans cet exercice la question i n'est pas utile pour les questions suivantes.
Soit A la matrice donnée par $A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

i. Déterminer les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés. 2pt

ii. On considère 2 fonctions x et y dérivables sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant

$$\forall t \in [0,+\infty[,\ \begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 2. \end{cases} \tag{1}$$

On note X et Y les transformées de Laplace de x et y. Déterminer le système d'équations vérifiées par X et Y. 2pt

iii. Déterminer X et Y, et en déduire x et y. 3pt

`Exercice 5.` (5 points)

Soit f la fonction impaire et 2π périodique telle que $f(x) = \cos(x)$ pour $x \in [0,\pi]$.

i. Déterminer la série de Fourier de f. On utilisera les (a_n) et les (b_n).

ii. Ecrire la relation de Bessel-Parseval pour f.

iii. La série de Fourier de f converge-t-elle uniformément ?