MVA101 T. Horsin
2012–2013 *http://maths.cnam.fr* CNAM Paris Centre

Février 2013, Première session d'examen. Durée: 3h
Tous documents autorisés, calculatrices interdites.
Le barême, donné à titre indicatif, pourra être modifié.

Exercice 1. (2 points)

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes:

i. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-1+(-1)^n)x^n.$

ii. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{e^n+n^2}x^n.$

Exercice 2. (4 points)

On considère f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ qui satisfait

$$\forall x\in\mathbb{R},\ x^2f''(x)+4xf'(x)+(2-x^2)f(x)=1.$$

On admet que f est développable en série entière.

i. Déterminer le développement en série entière de f, et donner son rayon de convergence.

ii. Déterminer f à l'aide des fonctions élémentaires.

Exercice 3. (6 points)

Dans cet exercice la question i n'est pas utile pour les questions suivantes.

Soit A la matrice donnée par $A:=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$.

i. Montrer que les valeurs propres de A sont 1 2 et 3.

ii. On considère 3 fonctions x y et z dérivables sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant

$$\forall t\in[0,+\infty[,\ \begin{cases}x'(t)=2x(t)-y(t)+z(t),\\ y'(t)=-x(t)+2y(t)+z(t),\\ z'(t)=2z(t),\\ x(0)=1,\ y(0)=2,\ z(0)=3.\end{cases}\qquad(1)$$

On note X et Y et Z les transformées de Laplace de x et y. Déterminer le système d'équations vérifiées par X, Y et Z.

iii. Déterminer X, Y et Z, et en déduire x y et z.

`Exercice 4.` (5 points)

i. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| = 2/\pi + \sum_{n \geq 2} \frac{-2.(-1)^n - 2}{n^2\pi - \pi}$$

ii. Soit f une fonction dérivable 2π périodique vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(x) = |\sin(x)|.$$

Déterminer $S(f)$ son développement en série de Fourier.

iii. Vérifier que $S(f)$ est bien une fonction dérivable.

`Exercice 5.` (6 points)

Dire si les séries suivantes sont convergentes:

i. $\dfrac{1}{(\ln(n))^n}$

ii. $1 - \cos(1/n)$.

iii. $\dfrac{1}{an+b} - \frac{c}{n}$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.