Figure 1 none

Juin 2012, première session d'examen. Durée: 3h
Tous documents autorisés, calculatrices interdites.
Le barême, donné à titre indicatif, pourra être modifié.

Exercice 1.

On considère la courbe paramétrée Γ suivante:

$$\begin{cases} x(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2} \\ y(t) = 2t + t^2 \end{cases}$$

i. Déterminer le domaine de définition

ii. Déterminer $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{y}{x}$ et $\lim_{t \to \pm\infty} \dfrac{y}{x^2}$.

iii. Montrer qu'en $t = 0$, on a une asymptote horizontale.

iv. Déterminer les variations et montrer qu'en $t = -1$ on a un point de rebroussement dont on précisera la nature.

v. Pour $a \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $t^2 + 2t - a^2 - 2a = 0$.

vi. Question facultative hors barême que l'on pourra utiliser pour la suite. Montrer que $t \neq 0$ satisfait $x(t) = x(-t-2)$ ssi $4(t+1)^3(t^2+2t-1) = 0$. En déduire que Γ présente un unique point double.

vii. Tracer Γ.

Exercice 2.

On considère la courbe Λ donnée en coordonnées polaires par

$$\rho(\theta) = \tan(\theta) + \tan(2 * \theta).$$

On rappelle que l'on note $\overrightarrow{u}\ (\theta) = \cos(\theta)\ \overrightarrow{i}\ + \sin(\theta)\ \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}\ (\theta) = -\sin(\theta)\ \overrightarrow{i}\ + \cos(\theta)\ \overrightarrow{j}$.

i. Donner le domaine de définition de ρ.

ii. Montrer qu'on peut se contenter d'étudier la courbe sur $[0, \pi/2[\setminus\{\pi/4\}$.

iii. Calculer $\lim_{\theta \to \pi/4^{\pm}} \rho(\theta)\sin(\theta - \pi/4)$. On rappelle que $\tan(u) \sim \dfrac{1}{\pi/2 - u}$ en $u = \pi/2$ et que $\sin(u) \sim u$ en $u = 0$. Interprêter ce résultat dans le repère $(0, \vec{u}\ (\pi/4), \vec{v}\ (\pi/4))$.

iv. De même calculer $\lim_{\theta \to \pi/2^{-}} \rho(\theta)\sin(\theta - \pi/2)$. Interprêter ce résultat dans le repère $(0, \vec{u}\ (\pi/2), \vec{v}\ (\pi/2))$.

v. Montrer que $\rho(\theta) = 0$ ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = -2\theta + k\pi$.

vi. Déterminer les variations de ρ.

vii. Tracer Λ.

Exercice 3.

Calculer l'aire de la zone entourée par la courbe paramétrée
$(x(t), y(t)) = (\sin(t), \sin(t)\cos(t))$.

Exercice 4.

On considère la courbe paramétrée donnée pour $t \in [0, 2\pi]$ par

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t), \\ y(t) = \sin^3(t). \end{cases}$$

i. Montrer que $\cos^4(t) = 1 - 2\sin^2(t) + \sin^4(t)$.

ii. Montrer que l'élément de longueur de la courbe est $ds^2 = \dfrac{9}{4}\sin^2(2t)$.

iii. En déduire que la longueur de la courbe vaut 6.

Exercice 5.

Soit, pour un nombre b réel, la matrice A donné par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & b \end{pmatrix}$$

i. Pour quelle(s) valeur(s) de b la matrice A représente-t-elle une application linéaire non injective ?

ii. Trouver les valeurs de b pour lesquelles 2 est valeur propre de A ?

iii. Peut-on choisir b pour que A représente une application linéaire dont l'image contienne le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?