Avril 2012, deuxième session d'examen. Durée: 3h.
Tous documents autorisés, calculatrices interdites.
Le barême est succeptible de modifications mineures.

Exercice 1

(11 points)

On considère la fonction f donnée par
$$f(x) := \frac{|x(x+2)|}{x-1}.$$

i. Donner son domaine de définition. La fonction est-elle paire ? impaire ? continue sur son domaine de définition ?

ii. Déterminer $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x$. La courbe représentative de f a-t-elle une asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

iii. Déterminer $\lim_{x\to 1} f(x)$.

iv. Etudier f sur $[-2, +\infty[$.

v. Calculer $\lim_{x\to -2} \frac{f(x)}{x+2}$. La fonction f est-elle dérivable en -2 ? De même calculer $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

vi. Déterminer les nombres a, b et c tels que si $x \neq 1$ et $x \geq 0$, on ait
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}.$$

vii. En déduire une primitive F_1 de f sur $]-\infty, -2]$, F_2 sur $[-2, 0]$, F_3 sur $[0, 1[$, F_4 sur $]1, +\infty[$.

viii. F_3 et F_4 ont-elle une limite en 1 ?

Exercice 2

(6 points)

i. Calculer la dérivée de $x \mapsto e^{\arctan(x)}$.

ii. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}, y'(x) - \dfrac{y(x)}{1+x^2} = \dfrac{2}{1+x^2} \\ y(0) = 0. \end{cases},$$

iii. Calculer $\lim_{x \to \pm\infty} y(x)$ et $\lim_{x \to \pm\infty} y'(x)$.

Exercice 3

(3 points)

Soit (u_n) la suite donnée par

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \frac{1+\sqrt{u_n}}{2}.$$

i. Montrer par récurrence que $\forall n \geq 0$, $u_n \geq 0$.

ii. Montrer par récurrence que $\forall n \geq 0$, $u_n \leq 1$.

iii. Montrer que (u_n) est convergente de limite 1.

Exercice 4

(3 points)

i. Déterminer E l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z-i}{z-1}$ est réel.
On pourra écrire que $\frac{z-i}{z-1}$ *est réel si et seulement si* $\frac{z-i}{z-1} = \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-1}$ *et pour* $z \neq 1$ *réduire au même dénominateur.*

ii.

1. Soit α un nombre **réel**. Montrer que le nombre complexe $\frac{1+i\alpha}{1-i\alpha}$ est de module 1.

2. Soit z un nombre complexe différent de i, on définit $u := \frac{1-i}{2}$ et $Z := z - \frac{1+i}{2}$ Montrer que

$$\frac{z-1}{z-i} = \frac{Z-u}{Z+u}.$$

Les deux questions suivantes sont hors barême.
Les traiter donnera un bonus si les autres questions du sujet sont abordées.

3. Déduire des deux questions précédentes que si z est un nombre complexe différent de i tel que $\frac{z-1}{z-i}$ est imaginaire pur alors $|Z| = 1/\sqrt{2}$.

4. En déduire l'ensemble des z de $\mathbb{C}$ tels que $\frac{z-1}{z-i}$ est imaginaire pur.