MVA101 T. Horsin
2011–2012 *http://maths.cnam.fr* CNAM Paris Centre

Février 2012, première session d'examen. Durée: 3h
Tous documents autorisés, calculatrices interdites.
Le barême, donné à titre indicatif, pourra être modifié.

Exercice 1. (2 points)

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes:

i. $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+n+1)x^n$.

On a $\lim \frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{n^2+n+1} = 1$ donc $R = 1$. 1pt

ii. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3n+1}$.

On a $\lim \frac{3n+1}{3n+4} = 1$ donc $R = 1$ 1pt

Exercice 2. (4 points)

On considère f une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ qui satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 4xf''(x) + 2f'(x) - f(x) = 0.$$

On admet que f est développable en série entière.

i. Déterminer le développement en série entière de f, et donner son rayon de convergence. 2pts

On écrit pour $|x| < R$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où R est le rayon de convergence de la série entière considérée. Sur $]-R,R[$ on peut dériver deux fois la série terme à terme, chose non évidente a priori.

Donc $f'(x) = \sum_{1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$. $f''(x) = \sum_{2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$.

La relation sur f donne $4\sum_{1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n + 2\sum_{0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = 0$, ce qui par unicité conduit à

$2a_1 - a_0 = 0$. Puis $2(n+1)(2n+1)a_{n+1} - a_n = 0$, soit $a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+2)(2n+1)}$.

Ceci conduit à $a_{n+1} = \frac{a_0}{(2n+2)!}$.

On en déduit que le rayon de convergence est $+\infty$.

ii. Montrer que si $x < 0$ alors $f(x) = f(0)\cos(\sqrt{-x})$. 2pt

On a alors $\forall x < 0$, $f(x) = a_0 \sum_0^\infty \frac{x^n}{(2n)!}$, et comme on sait que $\forall x \cos(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, on obtient le résultat annoncé.

Exercice 3. (6 points)

Dans cet exercice la question i n'est pas utile pour les questions suivantes.

Soit A la matrice donnée par $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

i. Déterminer les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés. 2pt

Les valeurs propres sont les solutions λ de l'équation $\det(A - \lambda I) = 0$, ce qui donne ici $\lambda^2 - 5 = 0$, ce qui donne $\lambda = \pm\sqrt{5}$. Pour $\lambda = \sqrt{5}$ alors si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé, on a $(2 - \sqrt{5})x + y = 0$ et on prend (par exemple) $x = 1$ et $y = \sqrt{5} - 2$. Pour $\lambda = -\sqrt{5}$ alors on est conduit à $x - (2 - \sqrt{5})y = 0$ et on prend (par exemple) $y = 1$ et $x = 2 - \sqrt{5}$.

ii. On considère 2 fonctions x et y dérivables sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 2. \end{cases} \tag{1}$$

On note X et Y les transformées de Laplace de x et y. Déterminer le système d'équations vérifiées par X et Y. 2pt On a $\begin{cases} pX(p) - 1 = 2X(p) + Y(p) \\ pY(p) - 2 = X(p) - 2Y(p) \end{cases}$.

On obtient donc $\begin{cases} (2-p)X(p) + Y(p) = -1 \\ -X(p) + (2+p)Y(p) = 2 \end{cases}$.

iii. Déterminer X et Y, et en déduire x et y. 3pt

Le déterminant du système précédent est $5 - p^2$. Si l'on veut que les solutions existent, il faut qu'elles existent pour p assez grand. On prend donc $p > \sqrt{5}$.

On peut procéder par élimination: $(5 - p^2)X(p) = -4 - p$ et $(5 - p^2)Y(p) = 3 - 2p$. Ainsi $X(p) = -\frac{p+4}{5-p^2}$ et $Y(p) = \frac{3-2p}{5-p^2}$.

On écrit $X(p) = \frac{a}{p - \sqrt{5}} + \frac{b}{p + \sqrt{5}}$ et $Y(p) = \frac{c}{p - \sqrt{5}} + \frac{d}{p + \sqrt{5}}$ soit $X(p) = \frac{(4\sqrt{5}+5)}{10(p-\sqrt{5})} + \frac{(-4\sqrt{5}+5)}{10(p+\sqrt{5})}$ et $Y(p) = \frac{(-3\sqrt{5}+10)}{10(p-\sqrt{5})} + \frac{(3\sqrt{5}+10)}{10(p+\sqrt{5})}$ ce qui donne $y(t) = \frac{(-3\sqrt{5}+10)}{10}e^{\sqrt{5}t} + \frac{(3\sqrt{5}+10)}{10}e^{-\sqrt{5}t}$ et $x(t) = \frac{(4\sqrt{5}+5)}{10}e^{\sqrt{5}t} + \frac{(-4\sqrt{5}+5)}{10}e^{-\sqrt{5}t}$.

`Exercice 4.` (5 points)

On considère la fonction 2π-périodique donnée sur $[-\pi,\pi]$ par
$$f(x) := x - \frac{x^3}{\pi^2}.$$

i. Montrer que f est dérivable en π et que f est C^1 sur $\mathbb{R}$. 2pt
`On a` $f(\pi) = 0 = f(-\pi)$. `On a` $f'_g(\pi) = -2$ `et` $f'_d(\pi) = -2$ `ce qui prouve que` f `est dérivable en` π. `Comme` f `est` C^1 `sur` $[-\pi,\pi]$ f `est` C^1 `sur` $\mathbb{R}$.

ii. Quesiton facultative: Montrer que
$$\int_{-1}^{1} \sin(ax)(x - x^3)dx = -12\frac{\cos(a)}{a^3} - 4\frac{\sin(a)}{a^2} + 12\frac{\sin(a)}{a^4}.$$
2pt
`On intègra par parties trois fois`
$$\int_{-1}^{1} \sin(ax)(x - x^3)dx = [(-\cos(ax)/a)(x - x^3)]_{-1}^{1} + \frac{1}{a}\int_{-1}^{1} \cos(ax)(1 - 3x^2)dx =$$
$$\frac{1}{a}\int_{-1}^{1} \cos(ax)(1 - 3x^2)dx = \frac{1}{a^2}[\sin(ax)(1 - 3x^2)]_{-1}^{1} - \frac{1}{a^2}\int_{-1}^{1} \sin(ax)(6x)dx =$$
$$\frac{1}{a^2}[\sin(ax)(1 - 3x^2)]_{-1}^{1} + \frac{1}{a^3}[\cos(ax)(6x)]_{-1}^{1} + \frac{6}{a^4}[\sin(ax)]_{-1}^{1},$$
`d'où le résultat.`

iii. Déterminer la série de Fourier de f. 1,5pt
`Puisque` f `est impaire, alors seuls les coefficients en sin sont à déterminer.`
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x - \frac{x^3}{\pi^2}) \sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} (\pi u - \pi u^3) \sin(n\pi u)\pi du = -12\pi\frac{\cos(n\pi)}{n^3\pi^3}$$

iv. Comparer $f(\frac{\pi}{2})$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$. 1,5pt
`Puisque` f `est` C^1 f `est somme de sa série de Fourier au sens de la convergence simple au moins. Donc` $f(\pi/2) = \sum_{1}^{\infty} -12\pi\frac{\cos(n\pi)}{n^3\pi^3} \sin(n\pi/2)$. `Finalement` $f(\pi/2) = \sum_{n=1}^{\infty} 12\pi\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3\pi^3}$

`Exercice 5.` (6 points)

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(\frac{1}{n})$$
où ε est une fonction telle que $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $|\varepsilon(x)| \leq M$.
On définit les suites (v_n) et (w_n) définies par $v_n := n^\alpha u_n$ et $w_n := \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$.

i. Montrer que la suite $(n^2 w_n)$ est bornée. En déduire que la série de terme général w_n est convergente ? 2pt

`En effet` $w_n = \alpha \ln(1+1/n) + \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = \alpha(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2})) - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha^2}{2n^2} + O(\frac{1}{n^2})$. `D'où le résultat. Il s'ensuit que` $|w_n| \leq \frac{K}{n^2}$ `pour` K `fixé. Donc` (w_n) `est le terme générale d'une série convergence.`

ii. Montrer que la suite v_n a une limite $k > 0$. 1pt `On en déduit que` $\sum_{k=1}^{N} w_k = \ln(v_{N+1}) - \ln(v_0)$ `admet une limite. Ainsi` $\ln(v_n)$ `admet une limite et donc` v_n `admet donc une limite` > 0.

iii. En déduire que $u_n \sim \frac{k}{n^\alpha}$. Si $\alpha > 1$ la série de terme général (u_n) est-elle convergente ? Et si $\alpha < 1$? 2pt

$n^\alpha u_n \to k$ `donc` $u_n \sim \frac{k}{n^\alpha}$. `Ainsi si` $\alpha > 1$ `la série` (u_n) `est convergente et` $\alpha < 1$ `la série diverge.`

iv. Application : on prend $u_n = \frac{2 \times 4 \times .... \times 2n}{1 \times 3 \times ..... \times (2n+1)}$. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+3} = 1 - \frac{1}{2n+3}$ et qu'on a donc $\alpha = 1/2$. La série de terme général (u_n) est-elle convergente ? 1pt

`Non`