Figure 1 none

Février 2012, première session d'examen. Durée: 3h.
Tous documents autorisés, calculatrices interdites.

Exercice 1

(11 points)
On considère la fonction f donnée par

$$f(x) := x\frac{|x|+1}{x^2+1}.$$

i. Donner son domaine de définition. La fonction est-elle paire ? impaire ? continue ? 1pt

ii. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x$. 1pt

iii. Etudier f sur $]0, +\infty[$ et en déduire son tableau de variation sur $\mathbb{R}^{+*}$. 1pt

iv. Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$. f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, que vaut $f'(0)$? 2pt

v. On considère la fonction g donnée par $g(x) := x\frac{x+1}{x^2+1}$. Donner le développement limité de g en 0 à l'ordre 2. 1pt

vi. On considère la fonction h donnée par $h(x) := x\frac{1-x}{x^2+1}$. Donner le développement limité de h en 0 à l'ordre 2. 1pt

vii. Montrer que si $x \geq 0, f(x) = \frac{x}{x^2+1} + 1 - \frac{1}{x^2+1}$. 0.5pt

viii. Montrer que si $x \leq 0, f(x) = \frac{x}{x^2+1} - 1 + \frac{1}{x^2+1}$. 0.5pt

ix. En déduire une primitive de f sur $[0, 1]$ et sur $[-1, 0]$. 2pt

x. Calculer $\int_{-1}^{1} f(x)dx$. 2pt

Exercice 2

(6,5 points)
On considère une suite (u_n) qui vérifie

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}, \\ u_0 = 0,\ u_1 = 1. \end{cases}$$

i. Calculer u_2, u_3. 0,5pt

ii. Montrer que la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique de raison 2. 2pt

iii. Montrer que la suite (w_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{n+1} - 2u_n$ est une suite géométrique de raison 1. 2pt

iv. Déterminer v_n et w_n pour tout n. En déduire u_n en fonction de n. 2pt

Exercice 3

(3 points)
Résoudre l'équation suivante et représenter dans le plan complexe les points dont les affixes sont les solutions:

$$z \in \mathbb{C},\ z^2 - i\bar{z} + 1 = 0.$$

Exercice 4

(6 points)

i. En utilisant la relation $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ et $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$, montrer que $\cos(\frac{\pi}{12}) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. 2pt

ii. Montrer que $\cos(\frac{5\pi}{12}) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin(\frac{5\pi}{12}) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. 2pt

iii. Donner le module et un argument de $e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$. On pourra mettre $e^{i\frac{5\pi}{12}}$ en facteur. 2pt