

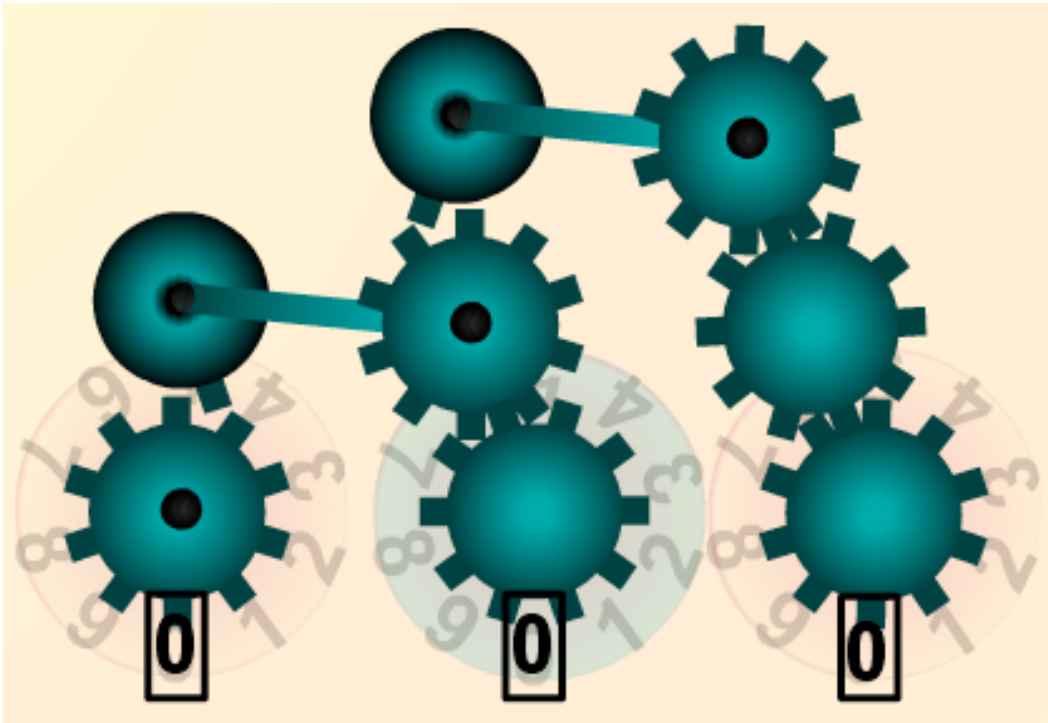
CHAIRE DE CALCUL SCIENTIFIQUE



Méthodes numériques pour l'ingénieur

Philippe DESTUYNDER

Version 2010-2011



2 Méthodes numériques pour l'ingénieur

Table des matières

Chapitre 1. Introduction générale	13
1.1. La résolution des systèmes linéaires	13
1.2. Le calcul des valeurs propres des matrices	15
1.2.1. La méthode globale de Jacobi	17
1.2.2. La méthode sélective de la puissance itérée	19
1.3. L'optimisation	19
1.4. Le contrôle des systèmes linéaires	22
1.5. Les aspects aléatoires	24
PREMIÈRE PARTIE. ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE	27
Chapitre 2. La méthode de Gauss et ses variantes	29
2.1. La factorisation de Gauss	29
2.2. L'algorithme de Gauss	33
2.3. Pivotage et astuces de programmation	34
2.4. Décompte des opérations	35
2.5. Cas d'une matrice symétrique définie positive	35
2.6. Possibilités de méthodes par blocs, aspects opérationnels	37
2.7. Stockage des matrices creuses et bandes	38
2.7.1. Stockage en ligne de ciel	39
2.7.2. Stockage Morse	40
2.8. Vectorisation et parallélisation	41
2.9. La méthode QR de Householder	42
2.10. Conclusion	45
Chapitre 3. Introduction à l'analyse numérique matricielle	47
3.1. Normes sur un espace vectoriel	47
3.2. Convergence dans un espace vectoriel	51

6 Méthodes numériques pour l'ingénieur

3.2.1. Exemples élémentaires de résultats d'analyse vectorielle	51
3.3. Normes matricielles vectorielles et normes subordonnées	53
3.4. Quelques propriétés de convergence des suites vectorielles et matricielles	58
3.5. Robustesse et conditionnement des système linéaires	61
3.6. Conclusion	62
Chapitre 4. Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires	63
4.1. La méthode de Jacobi	63
4.2. La méthode du point fixe	64
4.3. La méthode de relaxation de Gauss-Seidel	66
4.4. La méthode de sur-relaxation	67
4.5. Remarques sur le préconditionnement	70
4.5.1. Préconditionnement par la diagonale	71
4.5.2. Préconditionnement par la sous-matrice triangulaire inférieure de A	72
4.6. Conclusion	72
Chapitre 5. Calcul de valeurs et de vecteurs propres	73
5.1. La puissance itérée inverse avec décalage spectral	73
5.1.1. Description de l'algorithme élémentaire	74
5.1.2. Auto-ajustement de μ	75
5.1.3. Calcul des autres valeurs et vecteurs propres	76
5.1.4. Cas d'une matrice M de pondération	77
5.2. Itération sur un sous-espace	77
5.3. La méthode de Jacobi	78
5.3.1. Description de la méthode de Jacobi	78
5.3.2. Convergence de la méthode de Jacobi	80
5.4. La méthode de Lanczos	82
5.5. La méthode de bissection des suites de Sturm	84
5.6. Recherche du noyau d'une matrice	86
5.7. Conclusion	87
DEUXIÈME PARTIE. OPTIMISATION	89
Chapitre 6. Introduction à l'optimisation	91
6.1. Position du problème	91
6.2. Equivalence entre le problème d'optimisation et un système linéaire	92
6.3. Cas d'une matrice symétrique positive mais non définie	93
6.3.1. Procédé de Schmidt pour orthogonaliser	94
6.3.2. Construction d'un algorithme de résolution du système linéaire lorsque A est singulière	94
6.4. L'algorithme du gradient	95
6.5. Convergence de l'algorithme du gradient	97

6.5.1. Convergence du gradient à pas optimal	98
6.5.2. Convergence du gradient à pas constant	99
6.6. Le gradient conjugué	100
6.6.1. Description de l'algorithme	100
6.6.2. Analyse de la méthode du gradient conjugué	101
6.7. Conclusion	103
Chapitre 7. Optimisation de fonctions convexes	105
7.1. Rappels sur les fonctions convexes	105
7.2. Algorithme du gradient à pas constant pour minimiser une fonctionnelle convexe	111
7.3. Algorithme de Newton	112
7.4. Conclusion	115
Chapitre 8. Prise en compte des contraintes linéaires	117
8.1. Existence et unicité d'une solution	117
8.2. Caractérisation de la solution de (8.1)	118
8.2.1. Projection orthogonale sur $Ker(B)$	118
8.3. Construction de la projection P_K	121
8.4. Introduction de la dualité	123
8.5. Une interprétation du système dual	124
8.5.1. La méthode d'Uzawa	124
8.5.2. La méthode d'Uzawa régularisée	127
8.5.3. L'algorithme d'Arrow-Urwicz	129
8.6. La pénalisation	131
8.7. La méthode de Tychonov	133
8.7.1. Remarques préliminaires	133
8.7.2. Construction d'un développement asymptotique	134
8.7.3. Etude de l'erreur	136
8.7.4. Propriété de x^0	137
8.8. Conclusion	138
Chapitre 9. Quelques remarques sur la programmation linéaire	139
9.1. Un premier exemple intuitif	139
9.2. Un second exemple plus complexe	144
9.3. Cas général de l'algorithme décrit sur l'exemple de la section 9.2	146
9.3.1. Principe du simplexe	146
9.3.2. Quelques remarques théoriques	147
9.3.3. L'algorithme du simplexe	148
9.4. Remarque sur la convergence	149
9.5. Conclusion	149

Chapitre 10. Optimisation de fonctionnelles non différentiables	151
10.1. Le problème initial	151
10.2. Analyse du problème posé lorsque A est définie	152
10.2.1. La fonctionnelle est strictement convexe	152
10.2.2. La fonctionnelle J est coercive	152
10.2.3. Décentralisation partielle de la fonctionnelle	152
10.2.4. Non convexité du terme de degré un	153
10.2.5. Non coercivité des termes de degré un	153
10.2.6. J n'est pas dérivable	154
10.2.7. Existence et unicité de solutions sous conditions	154
10.3. Régularisation du problème non dérivable	156
10.3.1. Calcul de la dérivée Gâteaux de J^μ	157
10.3.2. Analyse du problème d'optimisation régularisé	158
10.3.3. Etude de l'équation d'Euler du modèle régularisé	159
10.4. Algorithme de résolution du type gradient	161
10.5. Une méthode de dualité pour le problème initial (10.2)	163
10.6. Conclusion	165
Chapitre 11. Optimisation convexe avec contraintes	167
11.1. Existence et unicité de solution	167
11.2. Caractérisation des solutions	168
11.3. Projection sur le convexe K	169
11.4. L'algorithme du gradient projeté	169
11.5. Introduction de la dualité	171
11.5.1. Formalisme théorique	171
11.5.2. Algorithme d'Uzawa	174
11.6. La méthode de pénalisation	175
11.7. Conclusion	175
Chapitre 12. Introduction au contrôle optimal	177
12.1. Un problème modèle	177
12.2. Quelques résultats mathématiques utiles	179
12.3. Calcul de la dérivée Gâteaux de J	182
12.4. Relation d'optimalité	183
12.5. Méthodes de calcul du contrôle optimal	183
12.5.1. Algorithme du gradient à pas constant	184
12.5.2. Résolution par la méthode de Riccati	184
12.6. Passage à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$	186
12.6.1. Une méthode asymptotique	186
12.6.2. Résultat de convergence	190
12.7. Résolution approchée du modèle de contrôle optimal	191
12.8. Conclusion	192

TROISIÈME PARTIE. DONNÉES INCERTAINES	193
Chapitre 13. Prise en compte de certaines incertitudes	195
13.1. Position des problèmes à résoudre	195
13.2. Principe du maximum pour les matrices	197
13.3. Cas de lois gaussiennes	201
13.3.1. Intervalle d'incertitude	204
13.4. Indépendance des variables aléatoires	204
13.5. Cas où la matrice est aléatoire	210
13.6. Estimation statistique des lois de probabilité	212
13.7. Conclusion	213
QUATRIÈME PARTIE. PROBLÈMES ET EXERCICES	215
Chapitre 14. Problème de synthèse	217
14.1. Un problème sur l'optimisation non différentiable	217
14.1.1. Le problème initial	217
14.1.2. Difficultés	217
14.1.3. Régularisation	218
14.1.4. Algorithme de résolution	219
Chapitre 15. Examens proposés à différentes sessions	221
15.1. Examen de la première session 2005-2006	221
15.2. Examen de la première session 2007-2008	224
15.3. Examen de la seconde session 2007-2008	228
15.4. Examen de la première session 2008-2009	230
15.5. Examen de la première session 2009-2010	232
15.6. Examen de la seconde session 2009-2010	235
Chapitre 16. Quelques exercices proposés en cours	237
Bibliographie	245
Index	247