Algèbre Linéaire et Géométrie (MVA107)

Corrigé du devoir $n°2$

Exercice n°1

1°) Calculons le determinant du système :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ m+1 & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1-m \\ 2+m & -1 & 2 \\ 2+m & -m & 3 \end{vmatrix} = (m+2)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1-m \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -m & 3 \end{vmatrix} = (m+2)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1-m \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1-m & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(m+2)\begin{vmatrix} 1 & 1-m \\ 1-m & 1 \end{vmatrix} = -(m+2)(1-(1-m)^2) = m(m+2)(m-2)$$

Il y a donc 3 valeurs de m qui annulent le determinant du système qui sont $-2, 0, 2$.

2°) il y a trois cas particuliers :

a) si $m = 0$ le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ x-y+2z=0 \\ 2x+3z=2 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ -2y+z=-2\ (L_2-L_1) \\ -2y+z=-2\ (L_3-2L_1) \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations sont les mêmes donc il y a une inconnue arbitraire soit z, on tire alors $y = \dfrac{z}{2}+1$ et $x = 1-\dfrac{3}{2}z$ et le système admet une infinité de solutions.

b) si $m = 2$ le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{c} x+y-z=4 \\ 3x-y+2z=0 \\ 2x-2y+3z=4 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y-z=4 \\ -4y+5z=-12\ (L_2-3L_1) \\ -4y+5z=-4\ (L_3-2L_1) \end{array}\right.$$

On voit en comparant les deux dernières équations que le système n'admet pas de solutions.

c) Si $m = -2$ le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+3z=0 \\ -x-y+2z=0 \\ 2x+2y+3z=0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+3z=0 \\ 5z=0\ (L_2+L_1) \\ -3z=0\ (L_3-2L_1) \end{array}\right.$$

Donc $z = 0$, y arbitraire et $x = -y$ donc le système admet une infinité de solutions.

3°) Dans le cas général, soit si $m \notin \{-2, 0, 2\}$ appliquons la méthode de Gauss ;

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+(1-m)z=m+2 \\ (1+m)x-y+2z=0 \\ 2x-my+3z=m+2 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+(1-m)z=m+2 \\ -(m+2)y+(1+m^2)z=-(m+2)(m+1)\ (L_2-(m+1)L_1) \\ -(m+2)y+(1+2m)z=-(m+2)\ (L_3-2L_1) \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+(1-m)z=m+2 \\ -(m+2)y+(1+m^2)z=-(m+2)(m+1) \\ m(2-m)z=m(m+2)\ (L_3-L_2) \end{array}\right.$$

On a donc $z = \dfrac{m+2}{2-m}$ d'où l'on tire de la deuxième équation $y = \dfrac{m+3}{2-m}$ et de la première $x = \dfrac{1}{m-2}$.

Exercice n°2

1°) Le polynôme caractéristique de M est :

$$det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) = (1-\lambda)(1+\lambda)(\lambda+2)$$

La matrice M est donc diagonalisable car elle admet 3 valeurs propres simples.

2°) Calculons les vecteurs propres :

$a)$ pour $\lambda = -1$ on obtient le système :

$$\begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ 2y + 3z = 0 \\ -2x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

d'où $x = -z$ et $y = -\frac{3}{2}z$ on peut donc prendre comme base du sous espace propre E_{-1} le vecteur $e_1 = (2, 3, -2)$

$b)$ pour $\lambda = 1$ on obtient le système :

$$\begin{cases} 2z = 0 \\ 3z = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

d'où $z = 0$ et $y = x$ on peut donc prendre comme base du sous espace propre E_1 le vecteur $e_2 = (1, 1, 0)$

$c)$ pour $\lambda = 2$ on obtient le système :

$$\begin{cases} -x + 2z = 0 \\ -y + 3z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

d'où $x = 2z$ et $y = 3z$ on peut donc prendre comme base du sous espace propre E_2 le vecteur $e_3 = (2, 3, 1)$

2°) Posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ on a alors :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = MX_n = M^2X_{n-1} = ... = M^{n+1}X_0$$

Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage à la base de vecteurs propres , on a :

$$M^n = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

On peut alors écrire que :

$$X_n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}X_0 == P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Un calcul simple donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 3 & -2 & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ d'où l'on obtient :

$$X_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 3 & -2 & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

D'où :

$$X_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n 2(-a+b-c) + 9a - 6b + 2^{n+1}(-2a+2b+c) \\ (-1)^n 3(-a+b-c) + 9a - 6b + 2^n 3(-2a+2b+c) \\ (-1)^{n+1} 2(-a+b-c) + 2^n(-2a+2b+c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

Les suites u_n, v_n, w_n auront des limites finies si et seulement si $-a+b-c = 0$ et $-2a+2b+c = 0$ soit $a = b$ et $c = 0$.Ces 3 suites sont alors stationnaires .

✯ ✯ ✯ ✯ ✯ ✯