MVA911 - DM n°3
Eléments de correction

Professeur : Rodolphe Touzé

Exercice

Système (Σ) :

$$\begin{cases} x - my + m^2z = 2m \\ mx - m^2y + mz = 2m \\ mx + y - m^2z = 1 - m \end{cases}$$

Calcul du déterminant de (Σ) en mettant m en fonction et en utilsant la méthode de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^2 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 1 & -m & 1 \\ m & 1 & -m^2 \end{vmatrix} = m\,(m^3 - m^2 + m^2 + m^4 - 1 - m^3)$$

$dét\ (\Sigma) = m\,(m^4 - 1) = m\,(m^2 - 1)\,(m^2 + 1)$

$\mathbf{dét\ (\Sigma) = m\,(m - 1)\,(m + 1)\,(m^2 + 1)}$

$dét\ (\Sigma) = 0 \Leftrightarrow m\,(m-1)\,(m+1)\,(m^2+1) = 0 \Leftrightarrow m\,(m-1)\,(m+1)\,(m^2+1) = 0$

$\Leftrightarrow m = 0$ ou $m - 1 = 0$ ou $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 0$ ou $m = 1$ ou $m = -1$

Si $m \in \mathbb{R} - \{-1\,;\,0\,;\,1\}$ alors le système (Σ) est un système de Cramer qui admet un unique triplet solution.

∗ ***Si $m = -1$ alors***

$$\begin{cases} x - my + m^2z = 2m \\ mx - m^2y + mz = 2m \\ mx + y - m^2z = 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = -2 \\ -x - y - z = -2 \\ -x + y - z = 2 \end{cases}$$

Si $\mathbf{m = -1}$ *alors* $S = \varnothing$

$* \ \boldsymbol{Si\ m = 0\ alors}$

$$\begin{cases} x - my + m^2z = 2m \\ mx - m^2y + mz = 2m \\ mx + y - m^2z = 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ y = 1 \end{cases}$$

$Si\ \boldsymbol{m = 0}\ alors\ S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z) = (0, 1, z)\}$

$* \ \boldsymbol{Si\ m = 1\ alors}$

$$\begin{cases} x - my + m^2z = 2m \\ mx - m^2y + mz = 2m \\ mx + y - m^2z = 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \\ z = x + y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ \\ z = 1 + y \end{cases}$$

$Si\ \boldsymbol{m = -1}\ alors\ S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z) = (1, y, 1 + y)\}$

$* \boldsymbol{Si\ m} \in \mathbb{R} - \{\boldsymbol{-1\ ;\ 0\ ;\ 1}\}$ **:**

$$\begin{cases} x - my + m^2z = 2m \\ mx - m^2y + mz = 2m \\ mx + y - m^2z = 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \begin{vmatrix} 2m & -m & m^2 \\ 2m & -m^2 & m \\ 1-m & 1 & -m^2 \end{vmatrix} / (m(m-1)(m+1)(m^2+1)) \\ \\ y = \begin{vmatrix} 1 & 2m & m^2 \\ m & 2m & m \\ m & 1-m & -m^2 \end{vmatrix} / (m(m-1)(m+1)(m^2+1)) \\ \\ z = \begin{vmatrix} 1 & -m & 2m \\ m & -m^2 & 2m \\ m & 1 & 1-m \end{vmatrix} / (m(m-1)(m+1)(m^2+1)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \begin{vmatrix} 2m & -m & m^2 \\ 2 & -m & 1 \\ 1-m & 1 & -m^2 \end{vmatrix} \;/\; ((m-1)(m+1)(m^2+1)) \\[2ex] y = \begin{vmatrix} 1 & 2m & m^2 \\ 1 & 2 & 1 \\ m & 1-m & -m^2 \end{vmatrix} \;/\; ((m-1)(m+1)(m^2+1)) \\[2ex] z = \begin{vmatrix} 1 & -m & 2m \\ 1 & -m & 2 \\ m & 1 & 1-m \end{vmatrix} \;/\; ((m-1)(m+1)(m^2+1)) \end{cases}$$

Après développement avec la méthode de Sarrus, factorisation des polynômes en m puis simplification :

$$\begin{cases} x = m(m^2+3) / ((m+1)(m^2+1)) \\[1ex] y = -(m-1)/(m^2+1) \\[1ex] z = 2/(m+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = 2m \\ mx - m^2 y + mz = 2m \\ mx + y - m^2 z = 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow AX = B \text{ avec } \det(A) \neq 0$$

$AX = B$ *avec* $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow I_3X = A^{-1}B$
$\Leftrightarrow X = A^{-1}B$

Pour rappel, $A^{-1} = {}^t(A^{CO}) / \det(A)$ *soit :*

$$\begin{bmatrix} (m^2+m+1)/((m+1)(m^2+1)) & -m/((m+1)(m^2+1)) & m/(m^2+1) \\ m/((m-1)(m^2+1)) & -m/((m-1)(m^2+1)) & 1/(m^2+1) \\ 1/(m^2-1) & -1/(m(m^2-1)) & 0 \end{bmatrix}$$

$$D'où\;\; X = \begin{bmatrix} m(m^2+3)/((m+1)(m^2+1)) \\ -(m-1)/(m^2+1) \\ 2/(m+1) \end{bmatrix}$$

Résolution du système par la méthode du pivot de Gauss (Gauss-Jordan avant pivot normalisé) pour $m \in \mathbb{R} - \{-1\,;\,0\,;\,1\}$*:*
(L_1) ; $(L_3 \leftarrow (mL_1 - L_2)/(m(m^2-1)))$; $(L_2 \leftarrow (L_3 - L_2)/(m^2+1))$

$$\left\{\begin{array}{l} x - my + m^2z = 2m \\ mx - m^2y + mz = 2m \\ mx + y - m^2z = 1 - m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - my + m^2z = 2m \\ y - (m^2+m)z/(m^2+1) \\ \quad = (1-3m)/(m^2+1) \\ z = (2m^2 - 2m)/(m(m^2-1)) \end{array}\right.$$

(L_3) ;
$(L_2 \leftarrow L_2 + ((m^2+m)/(m^2+1))\,L_3)$;
(*Isoler* x *dans* L_1).

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2m + my - m^2z \\ y = -(m-1)/(m^2+1) \\ z = 2/(m+1) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = m(m^2+3)/((m+1)(m^2+1)) \\ y = -(m-1)/(m^2+1) \\ z = 2/(m+1) \end{array}\right.$$

******