MVA903 - DM n°3
Éléments de correction

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) \quad et \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

La somme S_n s'appelle la somme de Riemann associée à l'intégrale et correspond à une subdivision régulière de l'intervalle $[a;b]$ en n petits intervalles.
Dans les exercices 1, 2 et 3, nous prendrons $a = 0$ et $b = 1$ avec f une fonction continue sur $[0;1]$.

1°) $S_1 = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(0 + k\frac{1-0}{n}) \quad avec\ f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\mathrm{Arctan}(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

2°) $S_2 = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-k/n}}{n}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-k/n}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-k/n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(0 + k\frac{1-0}{n}) \quad avec\ f(x) = e^{-x}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-k/n}}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^1 = \frac{e-1}{e}$$

3°) $S_3 = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(n+k)^3}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(n+k)^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k\frac{1-0}{n}\right)$$

$avec\ f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(n+k)^3} = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^3}\,dx = \left[\frac{-1/2}{(1+x)^2}\right]_0^1 = \frac{3}{8}$$

4°) $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} Arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(Arctan(\sqrt{3}) - Arctan(0)\right)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

5°) $J = \int_1^2 \frac{x^6}{x(x+1)(x+2)(x^2+1)}\,dx$

Effectuez la division euclidienne de x^6 *par* $x(x+1)(x+2)(x^2+1)$.

La décomposition en éléments simples de $\frac{x^6}{x(x+1)(x+2)(x^2+1)}$ *est :*

$$x - 3 - \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{32}{5}}{x+2} + \frac{\frac{3}{10}}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{10}x}{x^2+1} \quad (\textit{fonction continue sur } [1;2]).$$

$$J = \int_1^2 x - 3 - \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{32}{5}}{x+2} + \frac{\frac{3}{10}}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{10}x}{x^2+1}\,dx$$

$$J = \left[\frac{x^2}{2} - 3x - \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{32}{5}\ln(x+2) + \frac{3}{10}Arctan(x) + \frac{1}{20}\ln(x^2+1)\right]_1^2$$

$$J = \frac{1}{20}\ln(5) - \frac{69}{10}\ln(3) + \frac{53}{4}\ln(2) + \frac{3}{10}Arctan(2) - \frac{3\pi}{40} - \frac{3}{2}$$

6°) $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin^4x\, cos^5x\ dx$ *(changement de variable* $u = sinx$*)*

La fonction $x \longmapsto sinx$ *est strictement croissante sur* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *et réalise une bijection de* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1;1]$. *Soit* $u = sinx$ *d'où* $du = cosx\,dx$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin^4x\, cos^5x\ dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin^4x\, cos^4x\ cosx\, dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin^4x\, cos^5x\ dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin^4x\ (1 - sin^2x)^2\ cosx\, dx = \int_{-1}^{1} u^4\ (1-u^2)^2\, du$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin^4x\, cos^5x\ dx = \int_{-1}^{1} u^4 - 2u^6 + u^8\, du = \left[\frac{u^5}{5} - 2\frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9}\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{315}$$

Formule de l'intégration par partie pour les questions 7, 8 et 10 :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)dx$$

7°) $L = \int_0^1 xe^{-x}\ dx$ *(intégration par parties)*

$u'(x) = e^{-x} \qquad v(x) = x \qquad u(x) = -e^{-x} \qquad v'(x) = 1$

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}\,dx = -e^{-1} - [e^{-x}]_0^1 = \frac{e-2}{e}$$

8°) $M = \int_0^1 e^x \sin(x)\ dx$ *(double intégration par parties)*

$u'(x) = \sin(x) \qquad v(x) = e^x \qquad u(x) = -\cos(x) \qquad v'(x) = e^x$

$$M = \int_0^1 e^x \sin(x)\,dx = [-e^x\cos(x)]_0^1 - \int_0^1 -e^x\cos(x)\,dx$$

$$M = 1 - e\cos(1) + \int_0^1 e^x\cos(x)\,dx$$

$u'(x) = \cos(x) \qquad v(x) = e^x \qquad u(x) = \sin(x) \qquad v'(x) = e^x$

$$M = 1 - e\cos(1) + [e^x\sin(x)]_0^1 - \int_0^1 e^x\sin(x)\,dx$$

$$M = 1 - e\cos(1) + e\sin(1) - M$$

$$M = \frac{1 - e\cos(1) + e\sin(1)}{2} = \frac{1 - e\cos\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\sqrt{2}}{2}$$

9°) *Calculons le volume d'une boule de rayon R à l'aide d'une intégrale.*

$$V = \int_{-R}^{R} S(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)\,dz = \pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

10°) $F(x) = \int_0^x \arctan(t)\ dt$

$u'(t) = 1 \qquad v(t) = \arctan(t) \qquad u(t) = t \qquad v'(x) = \dfrac{1}{1+t^2}$

$$F(x) = \int_0^x \arctan(t)\ dt = [t\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt$$

$$F(x) = x\arctan(x) - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^x$$

$$F(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

******