MVA903 Eléments de correction	DM n°2 Nom de l'enseignant : Rodolphe Touzé

1) *Calculer* $S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^4}{(n+k)^5}$

$$\frac{n^4}{(n+k)^5} = \frac{n^4}{n^5\left(1+\frac{k}{n}\right)^5} = \frac{1}{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n^4}{(n+k)^5} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^5} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \ avec\ b=1, a=0\ \ et\ \ f(x) = \frac{1}{(1+x)^5}$$

f est une fonction définie et continue sur $[0\,;1]$ comme composée de deux fonctions usuelles $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto (x+1)^5$, définies et continues sur l'intervalle.

$\forall x \in [0\,;1], (1+x)^5 \neq 0\ et\ \frac{1}{x}$ existe.

f est de la forme $\frac{1}{u^\alpha}$ dont les primitives sont de la forme : $\frac{-1}{(\alpha-1)u^{\alpha-1}} + c, c \in \mathbb{R}$.

Soit pour la fonction f, *les primitives de* f *sur* $[0\,;1]$ *sont* :

$\forall x \in [0\,;1], \mathrm{F(x)} = -\frac{1}{(5-1)(x+1)^{5-1}} + c = -\frac{1}{4(x+1)^4} + c, c \in \mathbb{R}.$

Une primitive de f *sur* $[0\,;1]$ est $F(x) = \frac{-1}{4(x+1)^4}$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^4}{(n+k)^5} = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^5} = \left[\frac{-1}{4(x+1)^4}\right]_0^1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^4}{(n+k)^5} = \int_0^1 f(x)dx = \frac{-1}{4(1+1)^4} - \left(\frac{-1}{4(0+1)^4}\right) = -\frac{1}{64} + \frac{1}{4} = \frac{15}{64}$$

$$donc\ \ S = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^4}{(n+k)^5} = \frac{15}{64}$$

2) *Calculer* $I = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2(x^2+1)}dx$

$$Soit\ \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} + \frac{dx+e}{x^2+1} (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \text{ à déterminer}$$

$$[f(x)\times x]_{x=0} = a = \left[\frac{1}{x(x+1)^2(x^2+1)}\times x\right]_{x=0} = \frac{1}{(0+1)^2(0^2+1)} = 1$$

$$[f(x)\times(x+1)^2]_{x=-1} = c = \left[\frac{1}{x(x+1)^2(x^2+1)}\times(x+1)^2\right]_{x=-1} = \frac{1}{-1((-1)^2+1)} = -\frac{1}{2}$$

$$a = 1; c = -\frac{1}{2}$$

$$[f(x)\times(x^2+1)]_{x=i} = e + id = \left[\frac{1}{x(x+1)^2(x^2+1)}\times(x^2+1)\right]_{x=i} = \frac{1}{i(i+1)^2} = \frac{1}{i(i^2+2i+1)}$$

$$[f(x)\times(x^2+1)]_{x=i} = e + id = \frac{1}{i(-1+2i+1)} = \frac{1}{2i^2} = -\frac{1}{2}$$

$$e = -\frac{1}{2}; d = 0$$

$$f(-2) = \frac{1}{-2(-2+1)^2((-2)^2+1)} = -\frac{1}{10}$$

$$f(-2) = \frac{1}{(-2)} + \frac{b}{(-2)+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{((-2)+1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{(-2)^2+1}$$

$$-\frac{1}{2} - b - \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = -\frac{1}{10}$$

$$a = 1; b = -1;\ c = -\frac{1}{2}; d = 0; e = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{(x+1)^2} + \frac{0x + \left(-\frac{1}{2}\right)}{x^2+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2(x^2+1)}$$

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2(x^2+1)}dx = \int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2(x^2+1)}dx$$

$$I = \left[\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2}\arctan(x)\right]_1^2$$

$$I = \left[\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2(x+1)}\right]_1^2 \text{ car } x \in [1;2] \ \textit{d'où } x > 0$$

$$I = \left(\ln\left(\frac{2}{2+1}\right) - \frac{1}{2}\arctan(2) + \frac{1}{2(2+1)}\right) - \left(\ln\left(\frac{1}{1+1}\right) - \frac{1}{2}\arctan(1) + \frac{1}{2(1+1)}\right)$$

$$I = \left(\ln\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}\arctan(2) + \frac{1}{6}\right) - \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right)$$

$$I = \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\arctan(2) + \frac{1}{6} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\arctan(2) - \frac{1}{12}$$

Or, $\quad$ *si* $x > 0$, $\quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

D'où $I = \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \frac{1}{12} = \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{12}$

3) *Calculer* $I = \int_0^1 (x^2+1)e^{-3x}\,dx$

$$I = \int_0^1 g(x)\,dx \ \text{ avec } g(x) = (x^2+1)e^{-3x}$$

g est une fonction définie et continue sur $[0\,;1]$ *comme composée et produit de fonctions définies et continues* ($x \mapsto -3x$, $x \mapsto e^x$ *et* $x \mapsto x^2+1$).

$\int_0^1 u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx$ avec :

$$u(x) = x^2+1, \qquad u'(x) = 2x$$
$$v'(x) = e^{-3x}, \qquad v(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

$$I = \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx = \left[(x^2+1)\left(-\frac{e^{-3x}}{3}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 2x\left(-\frac{e^{-3x}}{3}\right)dx$$

$$J = \int_0^1 2x\left(-\frac{e^{-3x}}{3}\right)dx$$

$$w(x) = 2x, \qquad w'(x) = 2$$
$$z'(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x}, \qquad z(x) = \frac{1}{9}e^{-3x}$$

$$J = \left[2x\left(\frac{e^{-3x}}{9}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 2\frac{e^{-3x}}{9}dx = 2\left(\frac{e^{-3}}{9}\right) - \left[2\left(-\frac{e^{-3x}}{27}\right)\right]_0^1 = \frac{2e^{-3}}{9} - \left[-\frac{2e^{-3}}{27} + \frac{2e^{0}}{27}\right]$$

$$J = -\frac{2}{27} + \frac{8e^{-3}}{27}$$

$$I = \left[(x^2+1)\left(-\frac{e^{-3x}}{3}\right)\right]_0^1 - J$$

$$I = \left(-\frac{2e^{-3}}{3} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{8e^{-3}}{27} - \frac{2}{27}\right)$$

$$I = \frac{11}{27} - \frac{26e^{-3}}{27}$$

$$I = \frac{11 - 26e^{-3}}{27}$$

$$I = \frac{11e^3 - 26}{27e^3}$$

******