MVA903	Eléments de correction du DM n°1 Nom de l'enseignant : R. Touzé

$$\mathrm{S_n} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \ et \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{S_n} = \int_a^b f(x)dx$$

La somme $\mathrm{S_n}$ *s'appelle la somme de Riemann associée à l'intégrale et correspond à une subdivision régulière de l'intervalle* $[a; b]$ *en n petits intervalles. Dans les exercices 1, 2 et 3, nous prendrons* $\mathrm{a} = 0$ *et* $\mathrm{b} = 1$ *avec* f *une fonction définie et continue sur* $[0; 1]$.

1) $S_1 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k\frac{1-0}{n}\right) \ avec \ f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

f est une fonction définie et continue sur $[0; 1]$ comme composée de deux fonctions usuelles définies et continues sur l'intervalle $[0; 1]$ (à savoir $x \longmapsto 1 + x^2$ *et* $x \longmapsto \frac{1}{x}$),

$\forall x \in [0; 1]$, $\quad 1 + x^2 > 0 \ \ et \ \ \forall x > 0, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$ *existe et est défini.*

f est une fonction usuelle dont les primitives sont de la forme : $\arctan x + c, c \in \mathbb{R}$

Une primitive de f *sur* $[0; 1]$ est $F(x) = \arctan x$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = S_1 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

Cette somme de Riemann vaut :

$$S_1 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$$

2) $S_2 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^3}{(n+k)^4}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n^3}{(n+k)^4} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n^4}{(n+k)^4} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n^3}{(n+k)^4} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^4} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k\frac{1-0}{n}\right) \ \ avec\ \ f(x) = \frac{1}{(1+x)^4}$$

f est une fonction définie et continue sur $[0; 1]$ comme composée de deux fonctions usuelles définies et continues sur l'intervalle $[0; 1]$ (à savoir $x \longmapsto (1+x)^4\ et\ x \longmapsto \frac{1}{x}$),

$\forall x \in [0; 1], \quad (1+x)^4 > 0 \ \ et \ \ \forall x > 0, \quad x \mapsto \frac{1}{x} \ existe\ et\ est\ défini.$

f est de la forme $\frac{u'}{u^n}$ dont les primitives F sont de la forme :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2, \quad F(x) = \frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

$avec : \ n = 4, \quad u'(x) = 1 \ \ et \ \ u(x) = (1+x)$

$Soit\ \ F(x) = \frac{-1}{(4-1)(x+1)^{4-1}} = -\frac{1}{3(x+1)^3}$

Une primitive de f sur $[0; 1]$ est $F(x) = -\frac{1}{3(x+1)^3}$

$$S_2 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^3}{(n+k)^4} = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^4} = \left[\frac{-1}{3(x+1)^3}\right]_0^1$$

$$S_2 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^3}{(n+k)^4} = \int_0^1 f(x)dx = = -\frac{1}{3(1+1)^3} - \left(-\frac{1}{3(0+1)^3}\right) = \frac{7}{24}$$

Cette somme de Riemann vaut :

$$S_2 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^3}{(n+k)^4} = \frac{7}{24}$$

3) $S_3 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{2k}{n}}}{n}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{2k}{n}}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{2k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-2\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k\frac{1-0}{n}\right) \quad avec \ f(x) = e^{-2x}$$

f est une fonction définie et continue sur $[0; 1]$ comme composée de deux fonctions usuelles définies et continues sur l'intervalle $[0; 1]$ (à savoir $x \mapsto -2x \ et \ x \longmapsto e^{x}$),
$\forall x \in [0; 1]$, $\quad x \mapsto e^{-2x} \ existe \ et \ est \ défini.$

f est de la forme $e^{\alpha x}$ $(avec\ \alpha \neq 0)$ dont les primitives F sont de la forme : $\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + c, c \in \mathbb{R}$,

Les primitives de f sur $[0; 1]$ *sont* :

$F(x) = \frac{1}{-2}e^{-2x} + k = -\frac{e^{-2x}}{2} + k, k \in \mathbb{R}$

Une primitive de f *sur* $[0; 1]$ est $F(x) = -\frac{e^{-2x}}{2}$

$$S_3 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{2k}{n}}}{n} = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^1 = -\frac{e^{-2\times 1}}{2} - \left(-\frac{e^{-2\times 0}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2}$$

Cette somme de Riemann vaut :

$$S_3 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{2k}{n}}}{n} = \frac{1 - e^{-2}}{2} = \frac{e^2 - 1}{2e^2}$$

******