MVA903 Eléments de correction	DM n°3 Nom de l'enseignant : R. Touzé

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation (E_1) : $y' - y = x$

(E_1) est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

$L'\acute{e}quation\ homog\grave{e}ne\ associ\acute{e}e\ est\ \ (E_H): y' - y = 0\ \ dont\ les\ solutions\ sont\ les\ fonctions\ y_H$

$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y_H(x) = \lambda e^x\ \ avec\ \lambda \in \mathbb{R}$

Recherchons une solution particulière y_p sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_p(x) = ax + b \\ y_p'(x) = a \end{cases}$$

En remplaçant dans (E_1) :

$a - (ax + b) = x$

Par identification :

$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Soit $y_p(x) = -x - 1$

Les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme, $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = y_H(x) + \ y_p(x)$, soit :

$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = \lambda e^x - x - 1, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation (E_2) : $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(E_2) est une équation différentielle du premier ordre à coefficient variable avec second membre

$L'\acute{e}quation\ homog\grave{e}ne\ associ\acute{e}e\ est\ \ (E_H):\ \ y' - \dfrac{1}{x}y = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, y_H(x) = Ke^{-A(x)}, \qquad K \in \mathbb{R}, \qquad avec\ A\ une\ primitive\ de\ a\ , \qquad a(x) = -\dfrac{1}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, y_H(x) = Ce^{-A(x)}, C \in \mathbb{R}, \qquad A(x)$ une primitive de $a(x) = -\dfrac{1}{x}$

$\forall x \in]-\infty; 0[, \ y_H(x) = Ce^{-(-\ln|x|)} = Ce^{\ln|x|} = Ce^{\ln(-x)}, C \in \mathbb{R}$

Les solutions de (E_H) sont de la forme $\forall x \in]-\infty; 0[, \ y_H(x) = -Cx = Dx, \ (C, D) \in \mathbb{R}^2$

$\forall x \in]0; +\infty[, \ y_H(x) = Ce^{-(-\ln|x|)} = Ce^{\ln|x|} = Ce^{\ln(x)}, C \in \mathbb{R}$

Les solutions de (E_H) sont de la forme $\forall x \in]0;+\infty[,\ y_H(x) = Cx, C \in \mathbb{R}$

Notons les solutions de $(E_H)\begin{cases}\forall x \in]-\infty;0[, y_H = \lambda x, & \lambda \in \mathbb{R} \\ \forall x \in]0;+\infty[, y_H = \mu x, & \mu \in \mathbb{R}\end{cases}$

Recherchons, à l'aide de la la méthode de la variation de la constante,

une solution particulière y_p sous la forme $y_P(x) = \mu(x)x$

$$\forall x \in]0;+\infty[,\begin{cases} y_p(x) = \mu(x)x \\ {y'}_p(x) = \mu'(x)x + 1\mu(x)\end{cases}$$

De même,

$$\forall x \in]-\infty;0[,\begin{cases} y_p(x) = \lambda(x)x \\ {y'}_p(x) = \lambda'(x)x + 1\lambda(x)\end{cases}$$

En remplaçant dans (E_2) :

$${y'}_p(x) - \frac{1}{x}y_p(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \mu'(x)x + \mu(x) - \frac{1}{x}\mu(x)x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\mu'(x)x + \mu(x) - \mu(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\mu'(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ est $\mu(x) = \operatorname{argsh}(x)$, primitive usuelle,

soit $y_p(x) = \mu(x)x = x.\operatorname{argsh}(x)$

Les solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}^*$ sont de la forme $\forall x \in \mathbb{R}^* : y(x) = y_H(x) + y_P(x)$, soit :

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\qquad y(x) = \lambda x + x.\operatorname{argsh}(x), \lambda \in \mathbb{R}$

3) Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation $(E_3) : y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$

(E_3) est une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre

L'équation homogène associée est $(E_H) :\ y'' - 3y' + 2y = 0$

$P(r) = r^2 - 3r + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times1\times2 = 9 - 8 = 1$

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2} = 2 \quad et \quad r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{2} = 1$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R},\qquad y_H(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^x,\qquad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

Recherchons une solution particulière y_p sous la forme

$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y_P(x) = ax + b$

$y'_p(x) = a$

$y''_P(x) = 0$

En remplaçant dans (E_3) :

$0 - 3(a) + 2(ax + b) = 2x - 3$

$2ax + 2b - 3a = 2x - 3$

Par identification :

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ -3a + 2b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y_p(x) = x$

Les solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = y_H(x) + y_P(x)$, soit :

$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{x} + x, \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

☆☆☆☆☆☆